Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker

En sammenligning på bakgrunn av resultatene fra TIMSS 2011

Anita Karimzadeh

Masteroppgave i realfagsdidaktikk ved

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Vår 2014

Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker

En sammenligning på bakgrunn av resultatene fra TIMSS 2011

2014

Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker

Anita Karimzadeh

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Sammendrag

Denne masteroppgaven tar utgangspunkt i resultatene fra den internasjonale undersøkelsen TIMSS – *Trends in International Mathematics and Science Study* fra 2011 og sammenligner læreverk fra to land i emneområdet algebra. Grunnet de relativt svake resultatene til norske elever sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet har jeg valgt å sammenligne norske lærebøker med en singaporsk lærebok. Dette fordi Singapore er et av de landene som skåret høyest på internasjonal basis i TIMSS 2011. Målet med denne studien har vært å undersøke hva som skiller lærebøkene for å finne mulige årsaker til at norske elever presterer så svakt i TIMSS. Dette innebar bruk av lærebøker, læreplaner, TIMSS-resultater, rammeverket til TIMSS og utvalgte TIMSS-oppgaver. Problemstillingen i denne masteroppgaven har vært følgende: *I hvilken grad bidrar fremstillingen av likninger og ulikheter i norske lærebøker for 8. trinn til å kunne besvare utvalgte TIMSS-oppgaver fra 2011 sammenlignet med en singaporsk lærebok fra secondary one (7. trinn)?*

Jeg har brukt en kvalitativ metode i denne studien med dokumentanalyse som datainnsamlingsmetode. Fire norske lærebøker er analysert og sammenlignet med kun én singaporsk lærebok og analysen er begrenset til to områder i algebra: likninger og ulikheter. Jeg har benyttet meg av analyseverktøyet til Hong og Choi (2014) som ble brukt for å sammenligne lærebøker fra to land i deres studie. Det analytiske rammeverket består av to dimensjoner: En horisontal analyse som viser et helhetlig bilde av innholdet, og en vertikal analyse som går mer i dybden på det matematiske innholdet.

Hovedresultatene viser at det er flere temaer som er introdusert i den singaporske læreboken som ikke er introdusert i de norske lærebøkene. Dette er blant annet temaer som elevene fikk oppgaver fra i TIMSS-undersøkelsen fra 2011. Videre fordrer flertallet av oppgavene i de norske lærebøkene et lavere kognitivt nivå og elevene blir ikke utfordret i samme grad som i den singaporske læreboken. Det er for det meste ren matematisk kontekst i de utvalgte områdene i de norske lærebøkene og det kommer lite frem på hvilken måte elevene kan relatere stoffet fra oppgavene til virkeligheten. Funnene indikerer at de norske lærebøkene ikke gir nok kunnskap om likninger, og spesielt ikke om ulikheter, til å kunne besvare de utvalgte TIMSS-oppgavene.

Forord

Denne studien er det avsluttende arbeidet som fullfører min utdannelse ved lektorprogrammet ved Universitetet i Oslo. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært spennende, frustrerende, utfordrende og ikke minst lærerikt. Jeg har lenge gledet meg til å bli lærer og nå tar jeg endelig det siste steget mot dette målet. Gjennom dette prosjektet har jeg fått et annet syn på norske lærebøker, og sett indikasjoner på hvorfor norske elever presterer så svakt i TIMSS. Dette er noe jeg skal ta med meg videre i læreryrket.

Det er mange som fortjener en stor takk med tanke på gjennomføring av denne oppgaven. Jeg vil rette en stor takk til mine veiledere Helmer Aslaksen og Inger Christin Borge for god støtte og konstruktive tilbakemeldinger. Takk til de i EKVA, *enhet for kvantitative utdanningsanalyser* som har hjulpet meg med å finne TIMSS-data og spesielt Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad som tok seg tid til inspirerende samtaler og gode råd. Jeg vil også takke min medstudent Rune Resell-Hansen, som jeg har delt veiledere med, for gode samtaler under arbeidet med hver vår masteroppgave i realfagsdidaktikk.

Takk til Fagbokforlaget og Elektronisk Undervisningsforlag som ga meg lærebøker og Helmer Aslaksen som lånte meg de resterende. Jeg vil også takke professor LING San, professor i matematikk og dekan ved Nanyang Technological University, for eksemplarer av hans lærebøker fra Singapore.

En spesiell takk til Øystein Carryl Solvang Døssland som tok seg tid til å lytte til mine frustrasjoner og for å ha kommet med gode innspill underveis.

Sist men ikke minst vil jeg takke familien min. En kjempestor takk til min storebror for korrekturlesing av oppgaven og til min mor og far for all støtte, motivasjon og for at dere alltid har hatt troen på meg. Jeg er glad i dere!

Oslo, juni 2014

Anita Karimzadeh

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av problemstilling

Internasjonale undersøkelser som TIMSS – *Trends in International Mathematics and Science Study* og PISA – *Programme for International Student Assessment* har vist at norske elever presterer svakt i matematikk. Slike prosjekter påvirker utdanningen og er et viktig politisk styringsredskap for utdanningssystemet i medlemslandene på nasjonal basis (Grønmo et al., 2012; Sivesind & Elstad, 2010). Undersøkelsene er trendstudier og man kan derfor sammenligne hvordan elevene har prestert over tid. TIMSS måler kunnskap og ferdigheter i matematikk og naturfag på 4. og 8. trinn. Studien viser at norske elever i flere år har prestert på et lavt nivå i matematikk med tanke på det internasjonale gjennomsnittet (Grønmo et al., 2012). I denne oppgaven skal jeg sammenligne Norge med Singapore. Singapore er et av de landene som skårer høyest på den internasjonale skalaen i TIMSS. Tross litt variasjoner i resultatene i TIMSS har begge landene i flere år ligget på omtrent samme plass sammenlignet med hverandre. I denne studien skal jeg se på resultater fra TIMSS 2011 for Norge og Singapore i emneområdet algebra på 8. trinn. Jeg har valgt å se på algebra fordi rapporten fra 2011 viser at det er størst gap mellom prestasjonene til norske og singaporske elever på 8. trinn i dette emneområdet (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012).

På lik linje med aritmetikk er algebra betegnet som ”motoren” i matematikken. Derfor er det viktig for elevene å ha gode kunnskaper i spesielt disse to områdene (Grønmo et al., 2012, s. 27). På høyere nivåer i utdanningssystemet er algebra en sentral del av det matematiske språket og nødvendig for å forstå mange av grunnidéene innenfor matematikk. Ikke minst er algebra nødvendig for en lang rekke yrker og profesjoner. Algebra spesielt regnes som et av de områdene i matematikken som trenger modning over tid fordi emnet krever abstrakt tenkning og intellektuell forståelse (Grønmo et al., 2012). Det er blant annet derfor det har vært omdiskutert hvor tidlig algebra skal innføres i skolen for å øke elevenes forståelse (Lins & Kaput, 2004).

I denne oppgaven skal vi se på lærebøker som brukes i skolen ved å sammenligne norske og singaporske lærebøker. I flere århundrer har bøker fungert som et verktøy for å lære. De har en viktig rolle i matematikkundervisningen og er en basis for læring. I de siste tiårene spesielt har lærebøker fått mye oppmerksomhet i det internasjonale utdanningsmiljøet (Howson, 1995; Kongelf, 2011; Schmidt, McKnight, Raizen & Jakwerth, 1997). Selv om det er læreplanen som legger føringer for lærernes undervisning, har det tradisjonelt sett vært lærebøker som utgjør undervisningsgrunnlaget, og det er dermed innholdet i lærebøkene som elevene mer eller mindre har som utgangspunkt for det de har lært (Grønmo, Borge & Onstad, 2013).

Valg av problemstilling for denne studien kommer først og fremst av nysgjerrighet og et ønske om å finne ut hvorfor norske elever skårer så svakt i algebra sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet. Det er allerede flere antydninger til hvorfor vi er svake i algebra. Algebra introduseres relativt sent i grunnskolen. Norske elever var dessuten blant de yngste i TIMSS 2011. Det er nærliggende å tro at det også er andre faktorer som spiller inn fordi resultatene er så svake (Grønmo et al., 2012, s. 26). Det er veldig vanskelig å besvare hvorfor norske elever er svake i algebra i en masteroppgave fordi grunnene kan være mange og det vil kreve en massiv forskningsinnsats. Jeg har i denne oppgaven valgt å undersøke et moment som kan påvirke TIMSS-resultatene, nemlig det man kan se gjennom å studere innholdet i lærebøkene. Denne oppgaven består av en sammenligning mellom flere norske og en singaporsk lærebok innenfor utvalgte områder i algebra. Målet for denne studien er å undersøke hvordan den singaporske læreboken skiller seg ut fra de norske. Jeg skal også påpeke forskjeller ved de norske seg imellom. Jeg håper at studien vil kunne bidra til å belyse forbedringspotensialer til lærebøkene. Dette kan være relevant både for myndighetene ved revisjon av læreplanen og forlagene ved produksjon av nye lærebøker. Studien vil både påpeke oppbygningen til lærebøkene, innholdet og nivået med fokus på utvalget av oppgaver. Dersom det viser seg at de norske lærebøkene er svakere i forhold den singaporske læreboken når det gjelder å bidra til at elevene skal få de kunnskapene de trenger videre, kan dette gi en indikasjon på at våre lærebøker er med på å forårsake de svake resultatene i TIMSS.

1.2 Kapitteloppbygging

Kapittel 2 presenterer problemstilling og forskningsspørsmål til denne masteroppgaven. Jeg skal også se på læreplanens tre nivåer som blir brukt av TIMSS.

Kapittel 3 blir en sammenfatning av relevant litteratur som senere blir knyttet opp mot funnene. Jeg skal først se på ulike måter å definere begrepet algebra. Deretter blir ulike konsepter i algebra presentert ved å se på ulike tilnærminger og perspektiver til introduksjonene av algebra. Kapittelet skal omfatte bakgrunnsinformasjon om TIMSS, om resultater fra Norge og Singapore fra 2011 og utvalgte oppgaver som omhandler likninger og ulikheter. Avslutningsvis presenteres skolesystemet i Norge og Singapore samt hensiktsmessige deler av lærerplanen fra begge landene.

Kapittel 4 er oppgavens metodedel. Det blir beskrevet hvilken metode som benyttes, hva som er utvalget for denne oppgaven, fremgangsmåte for analysen og eksempler for hvordan analysen skal foretas. Siste delkapittel består av en drøftingsdel av validiteten samt svake og sterke sider ved metoden som brukes.

Kapittel 5 blir det mest omfangsrike kapittelet. Funnene gjort i analysen blir presentert ved hjelp av det analytiske rammeverket. Funnene presenteres både som tabeller, diagrammer og tekst.

I kapittel 6 blir funnene fra kapittel 5 oppsummert, tolket og drøftet. De mest sentrale tendensene fra forrige kapittel blir trukket frem og diskutert. Forskningsspørsmålene og problemstillingen blir belyst gjennom dette kapittelet.

I kapittel 7 kommer konklusjon for studien på bakgrunn av det som kommer frem i kapittel 6. Her blir forskningsspørsmålene og problemstillingen besvart.

2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Av hensyn til oppgavens omfang vil analysen begrenses til å omfatte kun to områder innenfor algebra: likninger og ulikheter. Denne studien baserer seg på utvalgte lærebøker. Det er lærebøker fra 8. trinn i Norge og fra secondary one i Singapore, som tilsvarer 7. trinn. Problemstillingen er som følger:

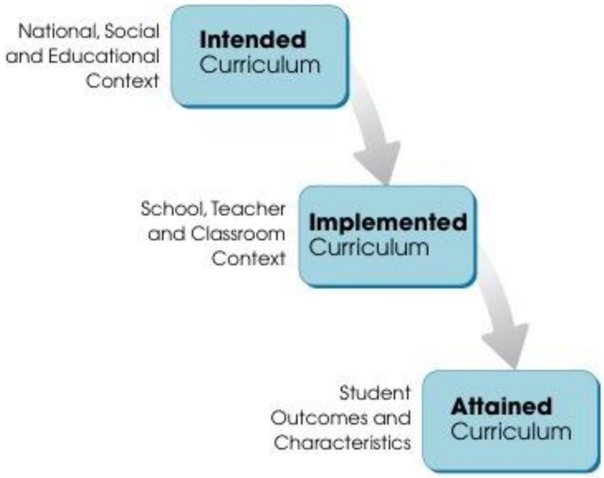
- *I hvilken grad bidrar fremstillingen av likninger og ulikheter i norske lærebøker for 8. trinn til å kunne besvare utvalgte TIMSS-oppgaver fra 2011 sammenlignet med en singaporsk lærebok fra secondary one?*

I den forbindelse har jeg formulert to forskningsspørsmål som skal belyse problemstillingen i denne oppgaven.

I. Hva skiller presentasjonen av likninger og ulikheter i utvalgte lærerbøker på 8. trinn i Norge og secondary one i Singapore?
II. Hvordan skiller oppgavene seg på det kognitive nivået i de utvalgte singaporske og norske lærebøkene?

Siden jeg i denne studien skal analysere lærebøker, vil jeg se på læreplaner da disse brukes som utgangspunkt i produksjon av læreverk. Læreplanene inneholder kompetansemål som beskriver kunnskap og ferdigheter elevene skal utvikle. I tillegg vil jeg bruke rammeverket for TIMSS som fungerer på tilsvarende måte for TIMSS som læreplanen fungerer for lærebøkene. Rammeverket inneholder føringer for det elevene skal ha lært før undersøkelsen. I forbindelse med TIMSS er det hensiktsmessig å se på hierarkiet av de tre nivåene til læreplanen som er introdusert i rammeverket for TIMSS 2011 (Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan & Preuschoff, 2009). De tre nivåene av læreplanen er: *Den intenderte læreplanen, den implementerte læreplanen* og *den resulterte læreplanen*. Den intenderte læreplanen representerer matematikken som samfunnet mener at elevene må lære og hvordan utdanningssystemet bør organiseres for å fremme læring (Mullis et al., 2009, s. 10). Den er vedtatt av myndighetene og består av læreplandokumenter. Disse tolkes blant annet av lærebokforfattere og lærere. Noen velger å plassere lærebøker under den intenderte læreplanen, mens andre plasserer de mellom den intenderte og den implementerte læreplanen

(Grønmo, 2014)[1]. I likhet med TIMSS har jeg i tillegg til læreplanen valgt lærebøkene til å være en del av den intenderte læreplanen i denne oppgaven. Den implementerte læreplanen blir lærernes måte å gjennomføre tolkningen i klasserommet. Det som elevene har lært og står igjen med er den resulterte læreplanen (Gjone, 2003, s. 268-270; Grønmo & Onstad, 2013; Mullis et al., 2009, s. 10). De tre nivåene faller henholdsvis innenfor storsamfunnet, lokalsamfunnet og individnivå for hvert steg i hierarkiet (Gjone, 2003).



Figur 1: Læreplanens tre nivåer (Mullis et al., 2009, s. 10).

Det er den intenderte og resulterte læreplanen som inngår i denne oppgaven. Mellomnivået vil ikke bli studert, fordi det er de tingene som foregår i klasserommet og en observasjon av et representativt utvalg inngår ikke i denne masteroppgaven. Den intenderte læreplanen bestående av læreplandokumenter blir tolket av lærebokforfattere, og deretter tolket av meg som forsker. Videre skal den resulterte læreplanen omfatte resultater i algebra fra TIMSS-undersøkelsen i 2011. Disse resultatene er fra utvalgte oppgaver som handler om likninger og ulikheter. I den forbindelse vil jeg undersøke hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene må ha for å kunne løse disse oppgavene.

[1] Grønmo, L.S. (2014, 02.06). [Personlig kommunikasjon, læreplaner].

3 Teori

I teoridelen vil jeg først og fremst redegjøre for begrepet algebra. Videre vil jeg se på ulike konsepter og områder innenfor algebra. Dette danner det teoretiske rammeverket som er relevant for denne studien. Her blir det tatt opp ulike aspekter i faglitteraturen som jeg mener er nødvendig for en algebraisk forståelse. Videre skal jeg gi bakgrunnsinformasjon om forskningsprosjektet TIMSS, vise til resultater og utvalgte oppgaver som er grunnlaget for denne masteroppgaven. Deretter blir skolesystemet og læreplanen til Norge og Singapore presentert. Avslutningsvis skal jeg redegjøre for forkunnskaper i algebra og ”The Model Method”.

3.1 Algebra

3.1.1 Hva er algebra?

For å kunne ta fatt på algebra i lærebøkene, vil jeg redegjøre for hva som ligger i begrepet algebra. Algebra er en gren, eller et hovedområde i matematikken. I dagligtalen blir algebra ofte forbundet med bokstavregning. Det er ikke like lett å gi en direkte forklaring på selve begrepet, men man kan si noe om hva som ligger i konseptet algebra og hva den inneholder. Lee (1996, s. 87) ser på algebra som en underkultur av den matematiske kulturen på samme måte som man kan se på amerikansk fotball som en kultur. Innenfor kulturen deler man et felles språk og felles aktiviteter. En aktivitet kan eksempelvis være å generalisere. ”Algebra er en form for generalisering av tall og tallregning” (Grønmo, Borge & Onstad, 2013, s. 166). Tall og tallregning, altså aritmetikk, lærer elevene før algebra og dette blir gjennom algebraen utvidet til et nytt konsept. Det er ikke bare overgangen som blir generalisert, men det er en aktivitet som brukes konstant i det symbolske språket. Algebra har mange aspekter, men jeg vil kun gi eksempler fra elementær algebra da denne studien undersøker lærebøker på lavere nivåer i skolesystemet. Elementær algebra består blant annet av å manipulere, faktorisere, utvide, løse likninger og ulikheter og å forenkle uttrykk (Wheeler, 1996). Mer generelt er algebra en studie av systemer som inneholder ukjente verdier.

3.2 Å lære algebra

3.2.1 Likhetstegnet

I matematikkspråket generelt blir likhetstegnet flittig brukt. Likhetstegn brukes når man skal vise at to sammensetninger er identiske og kan bli sett på som et signal eller et symbol på noe som skal beregnes. Det som står på hver side av likhetstegnet er likeverdig (Brekke, Grønmo & Rosén, 2000). Dette gjelder både for uttrykk og for likninger. I likninger må man derfor gjøre de samme regneoperasjonene på begge sider av likhetstegnet for å opprettholde likeverdighet. Det er ikke alltid like lett å se at en algebraisk likning er lik på begge sider da den består av en eller flere variabler, i motsetning til tallregningen. Likevel er det viktig å vite at det alltid er slik, da likhetstegnet betyr ”er lik” i alle tilfeller.

3.2.2 Symbolbruk

For å kunne jobbe med algebraiske uttrykk, formler, likninger og ulikheter, må man kunne skriftspråket i algebra. Dette skriftspråket involverer symbolbruk. Et viktig begrep i algebra er *variabel*. ”Variabelbegrepet inneholder to ulike aspekter. Det første aspektet er oppfatningen om at noe varierer – i motsetning til det å være konstant. (..). Det andre aspektet er måten en bruker bokstaver på til å representere generaliserte tall i matematikk” (Brekke et al., 2000, s. 9). I det andre aspektet blir den variable størrelsen erstattet med en bokstav. Talluttrykkene kan da samles til ett uttrykk, for eksempel 4x – 2 der ”x” kan være et naturlig tall (Brekke et al., 2000). Radford (1996) skiller mellom den konseptuelle strukturen til en variabel og et ukjent tall. Det ukjente tallet vil ikke variere i motsetning til en variabel som utpeker en kvantitet der verdien varierer. Algebraisk resonnering starter ikke når vi begynner å bruke bokstaver som tall. Hvis en bokstav står for et tall, vil ikke nødvendigvis bokstaven variere. Det kan være et generalisert tall. Et eksempel kan gis ved formelen for arealet til en sirkel, $A = \pi r^2$. Janvier (1996) mener at lærere og lærebokforfattere vanligvis overser at man kan bruke formelen på to ulike måter. Formelen ovenfor kan enten brukes til å beregne direkte ved hjelp av kjente verdier for ”r”, og da blir automatisk ”A” også kjent når verdien for ”r” er oppgitt. Man kan også se på arealet som en likning der man må gjøre andre beregninger for å finne løsningen på variabelen ”r”. Sistnevnte er beregninger og resonneringer som er grunnlaget for algebraisk resonnering.

3.2.3 Generalisering

Som nevnt ovenfor, er generalisering en sentral aktivitet i algebra. En overgang fra varierende størrelser av figurer som er bygd opp av samme geometriske mønster til algebra, er et eksempel som man kan finne i lærebøker og i en TIMSS-oppgaver fra 2011. Det går over mot algebra når man skal finne et generelt uttrykk for mønsteret. Bemerkningene til de ulike bidragsyterne indikerer et visst antall problemer knyttet til generaliserende tilnærming ved introduksjonen til algebra. Innenfor geometriske mønster vil ikke problemet som oftest ligge i å se mønsteret, men å kunne finne et brukbart algebraisk mønster (Bednarz, Kieran & Lee, 1996, s. 7). Lettere sagt vil det å finne et algebraisk mønster være på et nivå som er mer abstrakt og regnes derfor for å være vanskeligere. Jeg sett på begrepet generalisering slik Mason har beskrevet det. "Generalization, in which I include variation and extension, as well as pure generalization, in one means for broadening the scope of reference and application of a result, thus placing it in ever broader context by removing particular restrictions" (Mason, 1996, s. 69). Videre mener han også at generalisering er hjerterytmen til matematikk og at dersom elever ikke jobber med å uttrykke sine egne generaliseringer vil ikke matematisk tenkning finne sted (Mason, 1996, s. 65).

3.2.4 Problemløsning og modellering

Det finnes mange definisjoner på hva et problem er eller hva som menes med problemløsning. Tradisjonelt sett har problemer i matematikken blitt sidestilt med matematiske oppgaver som skal utføres (Harder, 2013; Schoenfeld, 1992). Som nevnt tidligere har denne studien som hensikt å analysere likninger og ulikheter i matematikklærebøker. Problemene i lærebøkene dukker opp i form av en rutineoppgave eller en ikke-rutineoppgave der sistnevnt ofte er en tekstoppgave. En rutineoppgave kan være oppgaver som løses ved en gitt algoritme eller der fremgangsmåten er gitt. "(..) et problem er ikke bare en matematisk oppgave som skal utføres, det er en matematisk oppgave der løsningsmetoden(e) i utgangspunktet er ukjent for problemløseren" (Harder, 2013, s. 8). En tekstoppgave i algebra er vanligvis en standardoppgave der man kan bruke likningsløsning som verktøy for å løse oppgaven. Fordi likningen ikke er gitt, må man finne en løsningsmetode som kan løse problemet. George Pólya har presentert problemløsning og har gitt en firetrinns-oppskrift på hvordan man går frem for å løse et problem.

- Å forstå problemet
- Å legge en plan
- Å gjennomføre planen
- Å se tilbake.

Firetrinns-oppskriften er generell og derfor en grov beskrivelse av hvordan man går frem i en problemløsningssituasjon (Harder, 2013, s. 10; Polya, 2008).

Matematisk modellering er på samme måte som problemløsning et verktøy som ofte brukes for å løse oppgaver i matematikken. I tillegg vil de i noen grad sammenfalle da begge er løsningsmetoder. Ved matematisk modellering blir det lagd modeller som kan fremstille problematiske situasjoner fra virkeligheten. Modellering består av to faser: En formuleringsfase som blir fullstendiggjort ved en valideringsfase (Janvier, 1996). En situasjon blir først undersøkt i formuleringsfasen for å danne en sammenheng mellom variabler som er involvert. Disse sammenhengene kan eksempelvis være observasjoner, målinger eller gjetninger. Matematiske transformasjoner eller operasjoner fører frem en modell som blir uttrykt symbolsk (Janvier, 1996, s. 227). Modellering av problemer kan eksempelvis bestå av problemer fra virkeligheten som skal utrykkes symbolsk av likninger eller ulikheter. En likning eller en ulikhet kan bli konstruert fra et praktisk problem. Dette vil i stor grad sammenfalle med en problemløsningsstrategi. Valideringsfasen kan da benyttes for å teste validiteten av modellen ved å undersøke hvor god modellen er for virkeligheten (Janvier, 1996, s. 228). Man går fra konkret til abstrakt ved å sette opp en modell for siden å vende tilbake til det konkrete.

Å gå gradvis fra tekster som ligger nær opp til elevenes dagligspråk til symbolspråket vil være en tilnærming fra en situasjon der språket allerede er kjent. Elevene lærer å reflektere over hvilke av de gitte opplysningene som er viktige og hvilke som er ukjente, for så å oversette det til et algebraisk språk (Brekke et al., 2000). Dette gir utfordringer da det i noen tilfeller ikke kan oversettes direkte. Det algebraiske språket har egne regler som man må ta hensyn til. På samme måte som en oversettelse fra norsk til engelsk ikke blir like god dersom man oversetter ord for ord skjer dette også i matematikken (Brekke et al., 2000, s. 85).

Ved innføring av algebra som en ny kultur, kan man benytte tidligere erfarte konsepter eller kulturer til å lære det nye språket. Forklaringer eller eksempler fra den verden eleven kjenner til kan brukes som hjelpemiddel for å gi en bedre overgang fra tallregning til bruk av et kompakt algebraisk språk, som er nytt for eleven.

3.2.5 Matematisk tenkning

Matematikk kan ofte bli assosiert med memorering av regler, formler og prosesser som brukes til å løse problemer. Jobbing med bevis og utleding av bevis er mer vanlig på høyere utdanningstrinn, altså et høyre nivå enn det de elevene denne forskningen baserer seg på. Elever bør ikke se på matematikk som et begrenset system der bare fakta, konsepter og prosedyrer skal fanges opp (Stein, Grover & Henningsen, 1996, s. 456). Matematikklærere og filosofer har overbevisende argumenter for at forståelse for matematikk krever en spesiell type kunnskap (Stein et al., 1996, s. 456). Denne kunnskapen dreier seg om mer enn matematiske konsepter, setninger og deres struktur. For å få en full forståelse for matematikk inkluderer dette kapasiteten til å kunne innsette prosesser av matematisk tenkning ved utforming og utarbeiding av problemer, lete etter mønster, gjøre antagelser, utforske restriksjoner, gjøre slutninger fra data, abstrahere, forklare, skape, forsvare, utfordre og mye mer (Stein et al., 1996, s. 456). Elever må påtvinge mening med oppgaven ved å tolke den og bestemme seg for hvordan de skal gå frem for å løse problemet. Noen oppgaver kan ha flere løsningsstrategier og kan derfor løses på ulike måter.

Det anbefales å eksponere elever for krevende og meningsfulle oppgaver. Oppgaver som ikke bare er tilslørt repetisjonsøving på algoritmer elevene allerede kan (Stein et al., 1996). På ungdomstrinnet er det begrenset hvor mye elevene kan klare seg uten algoritmer, men grunntanken er at oppgaver skal gi utfordringer for å blant annet skape forståelse og følelsen av mestring som igjen fører til fremgang. Øvelse på samme type oppgave som krever samme prosedyre gir derfor ikke en slik problematisk situasjon der eleven må gjøre en ny tolkning for å løse problemet. Eleven kan klare alle slike oppgaver, men har ikke fått en god forståelse for hvordan lignende problemer kan løses senere. Dersom det er gitt eksempler på hvilke løsningsforslag som kan løse oppgavene, kan eleven begrense seg til det som er gitt ved å bruke snarveisstrategier og unngå å tenke ut bedre måter å løse oppgaven på. Elevens tenkning blir da preget av strategier. som fokuserer på overfladiske, gjenkjente karakteristikker, heller enn dypere matematisk forståelse (Lithner, 2003).

Schoenfeld forklarer at elever er ofte tilbøyelig til å løse oppgaver ved å se bort ifra ”sensemaking” og bruker heller snarveisstrategier (Lithner, 2003). Sensemaking er det som gir mening ut ifra erfaring. Snarveisstrategier kan eksempelvis være å bruke flytte- og bytteregelen uten å ha kjennskap til eller å vite at det er en snarvei fra addisjon- og subtraksjonsregelen. Det kan også være at man ikke har forståelse for hva likhetstegnet betyr. Lithner (2003) har studert elevenes matematiske resonnering i lærebøker og klassifisert flere oppgaveresonneringer. 70 % av oppgavene som ble studert kunne løses ved resonneringsmetoden ”identifikasjon av likheter”. Definisjonen er oversatt direkte fra Lithner (2003) og er som følger. Resonneringen er basert på identifikasjon av likheter dersom strategivalget baseres på identifikasjon av lignende overflateegenskaper i et eksempel, regel, teorem eller en annen situasjon beskrevet tidligere i teksten. Strategien implementeres ved å herme etter prosedyrer fra den identifiserte situasjonen (Lithner, 2003, s. 35). Overflateegenskaper er egenskaper som mer eller mindre er irrelevante i en problematisk situasjon. De resterende, altså 30 % av oppgavene ble klassifisert som tre andre resonneringstyper som stort sett er basert på analyse av iboende matematiske egenskaper, altså det som er sentralt i en spesifikk problematisk situasjon. Det er meningen å styre mot det som sannsynligvis er sant uten at det nødvendigvis er riktig eller komplett (Lithner, 2003, s. 32-33). Problemene oppstår når elever prøver å finne strategier ved å lete etter likheter i boka eller tidligere erfaringer. Når det kommer oppgaver som ikke passer inn i et kjent system, eller når det oppstår problemer i rutineoppgaver kan det bli problematisk og elevene oppnår lite fremskritt. Hvilke resonneringsmetoder elevene velger å bruke kommer blant annet an på hvilke muligheter de har ut ifra lærebøkene. Dersom lærebøkene konstant viser prosedyrer som kan brukes for å løse oppgaver og ikke gir utfordrende oppgaver, kan elevene velge å konstant herme etter samme metode. Likevel vil det til en viss grad være oppgaver som kan løses ved ”identifikasjon av likheter” fordi lærebøkene må kunne differensiere oppgavene så selv de svakeste elevene kan føle mestring.

3.3 Forskningsprosjektet TIMSS

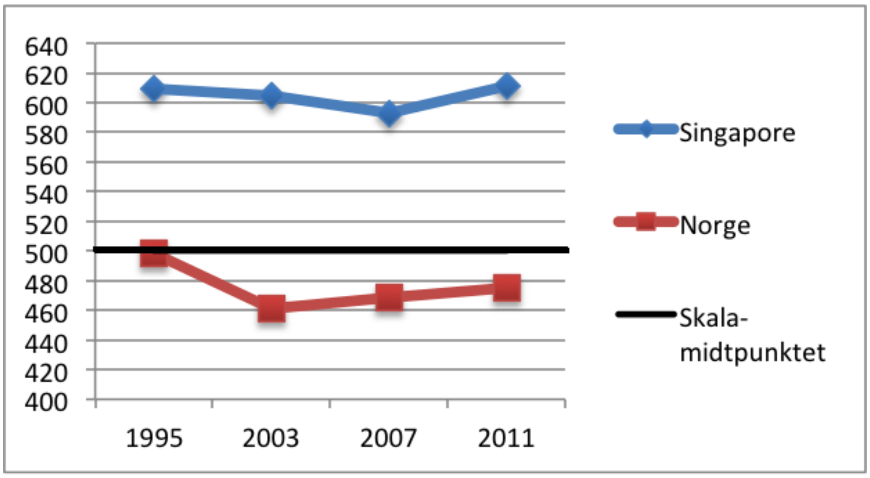
Som nevnt i innledningen er TIMSS en stor internasjonal undersøkelse som måler kunnskaper og ferdigheter i matematikk og naturfag. Det er omtrent 60 deltakerland. Undersøkelsen tester elever fra 4. og 8. trinn for å kunne sammenligne både internasjonale og nasjonale endringer over tid. Målet er ikke å gjøre det godt i TIMSS, men å forsøke å finne faktorer som fremmer og hemmer læring i skolen slik at elevene får den kunnskapen de trenger videre. I tillegg til testing av elevprestasjoner, blir også bakgrunnsvariabler undersøkt ved bruk av spørreskjemaer til skoleledere, lærere og elever. Dette er for å kunne få informasjon om blant annet elevenes hjemmemiljø, læringsmiljø, undervisningsmetoder, ressurser og rekrutteringer (Grønmo & Onstad, 2013; Grønmo et al., 2012). Norge har hittil vært med i TIMSS 1995, 2003, 2007 og 2011. Forberedelse til neste TIMSS-undersøkelse er allerede i gang og blir i 2015, altså hvert fjerde år (med unntak av 1999 for Norge). Med jevne mellomrom får vi data slik at det kan undersøkes hvordan og hvorfor vi presterer slik vi gjør. Dette er for at blant annet skolene skal få muligheten til å forbedre seg (Grønmo & Onstad, 2013; Grønmo et al., 2012).

Det er lagd en fast TIMSS – skala som gjør at studiene kan vise utvikling over tid. Denne skalaen er fastsatt fra det første TIMSS-studiet. Det er et fast punkt som kalles for skalamidtpunktet. Den ligger på 500 og er gjennomsnittet fra resultatene fra TIMSS i 1995. Det er mange oppgaver som ikke frigis for å kunne bruke de eksakt samme oppgavene neste gang undersøkelsen holdes og dette gjør at landene får muligheten til å undersøke utviklingen mer nøyaktig (Grønmo et al., 2012, s. 8).

3.3.1 Resultater fra TIMSS 2011

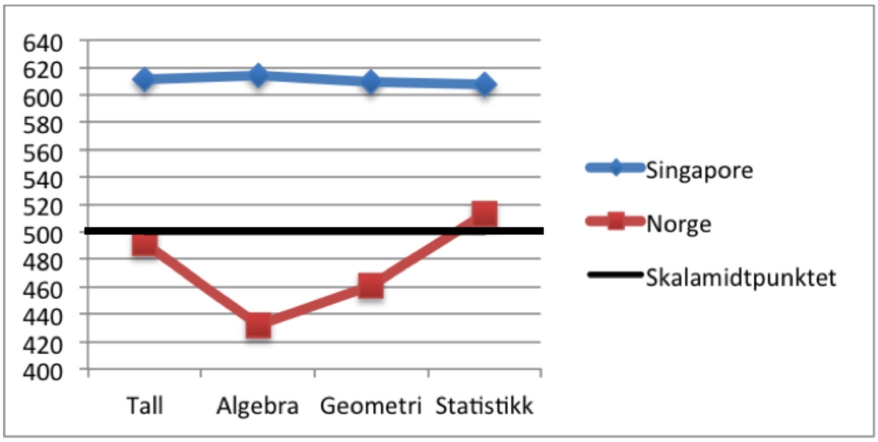
TIMSS-undersøkelsen som blir brukt på 8. trinn i Norge tester secondary two elever i Singapore, som tilsvarer 8. trinn. For 8. trinn viser resultatene fra TIMSS 2011 at Norge ligger under skalamidtpunktet. Norge lå på 20. plass med en gjennomsnittlig verdi på 475 i matematikk. Singapore kom på andreplass med en gjennomsnittlig verdi på 611 (Mullis et al., 2012, s. 42).

Nedenfor er det lagd en figur som illustrerer utviklingen for elevenes prestasjoner i matematikk i Norge og i Singapore. Resultatene fra Figur 2 er hentet fra TIMSS-publikasjoner (Mullis et al., 2012). Jeg har sett bort ifra resultatene fra TIMSS 1999 for Singapore fordi Norge ikke deltok. Norge har alltid ligget under gjennomsnittet, men etter nedgangen i 2003 har vi fått en svak positiv utvikling. Singapore har derimot alltid ligget over gjennomsnittet og i 2011 skåret de høyest etter en nedgang i 2007. Begge landene har en positiv utvikling, men Norge presterer fortsatt svakt både i forhold til Singapore og i det internasjonale perspektivet.



Figur 2: Elevers prestasjoner i matematikk i perioden 1995 – 2011.

Norske elever presterte svakest i emneområdene algebra i 2011. Figuren nedenfor viser nettopp dette. Det er store forskjeller i verdier mellom de ulike emneområdene i matematikk i Norge. Resultatet i algebra spesielt ligger nesten et helt standardavvik under gjennomsnittet. Singaporske resultater varierer mye mindre fra et emneområde til et annet. Det er små forskjeller, men singaporske elever var sterkest i emneområde algebra i 2011. Resultatene i Figur 3 er hentet fra Provasnik et al. (2012, s. 18).



Figur 3: Elevers prestasjoner i ulike emneområder i matematikk i 2011.

I undersøkelsen ble lærerne spurt om å besvare spørsmål knyttet til den implementerte læreplanen, altså det de har undervist i klasserommet. De rapporterte hvor stor andel de har gjennomgått i de ulike emneområdene som elevene har fått spørsmål fra. De norske lærerne oppga i gjennomsnitt at de hadde gjennomgått 29 % av emneområdet algebra som elevene hadde fått spørsmål fra. Singaporske lærere oppga at de hadde gjennomgått 94 % (Grønmo, Borge & Rosén, 2013, s. 82; Mullis et al., 2012, s. 350). Dette er dekningsgraden og angir hvor stor andel elevene har fått dekket det de testes i. Dette tyder på at singaporske elever har blitt undervist mer i algebra før undersøkelsen i 2011.

3.3.2 TIMSS-rammeverket

Rammeverket for TIMSS er designet slik at oppgavene i undersøkelsen faller best mulig innenfor lærerplanen til hver av deltakerlandene. Dette gjelder for begge fagene og begge trinnene som TIMSS undersøker. På grunn av mange og ulike læreplaner kan ikke rammeverket dekke absolutt alt, men målet er å gjøre det så rettferdig som mulig. Det er mange faktorer som må tas i betraktning. Nedenfor er det oppgitt hva TIMSS tar hensyn til når de utvikler oppgaver (Grønmo et al., 2012; Mullis et al., 2009).

- Oppgavene skal ligge innenfor læreplanen i de fleste deltakerlandene.
- Oppgavene skal kunne forsvare sin posisjon i en fremtidig utvikling av matematikk og naturfag i skole.
- Oppgavene skal være godt tilpasset de deltakende elevenes alderstrinn.
- Oppgavene skal fungere teknisk godt i en storskalaundersøkelse.
- Oppgavene skal fordele seg på emneområdene og de kognitive kategoriene i samsvar med prosentangivelsene i rammeverket (Grønmo et al., 2012, s. 130).

Ettersom jeg har tatt utgangspunkt i rammeverket for TIMSS for å velge ut områder i matematikk som jeg ville undersøke i lærebøkene, har jeg valgt å nevne dem her. Algebra er delt inn i tre emner. ”Mønster”, ”Algebraiske uttrykk” og ”Likninger/formler og funksjoner”. Jeg har valgt å nevnte fem punkter under ”Likninger/formler og funksjoner” som inngår i de to områdene, likninger og ulikheter.

i. Evaluate equations/formulas given values of the variables.
ii. Indicate whether a value (or values) satisfies a given equation/formula.
iii. Solve linear equations and linear inequalities, and simultaneous (two variables) linear equations.
iv. Recognize and write equations, inequalities, simultaneous equations, or functions that model given situations.
v. Solve problems using equations/formulas and functions (Mullis et al., 2009, s. 33).

Disse punktene er alt som står om likninger og ulikheter under rammeverket for algebra. Videre skal jeg se på oppgaver som faller innenfor dette rammeverket.

3.3.3 Utvalgte TIMSS-oppgaver fra 2011

Jeg har lagt hovedvekten på utvalgte oppgaver innenfor algebra som ble gitt ut i TIMSS 2011. Noen av oppgavene er ikke offentliggjort og kan dermed ikke vises, men jeg har vist resultatene og presentert hva slags type oppgaver det er. De andre oppgavene som ikke skal gjenbrukes er offentliggjort på hjemmesiden til TIMSS. Det er både flervalgsoppgaver og åpne oppgaver. De åpne oppgavene har ofte flere delvis riktige- og feilsvarskategorier. Jeg har valgt å kun se på resultater som viser alt rett, altså full skår. Til sammen er det gitt seks oppgaver med likningsløsning som algebraisk konsept og en oppgave med ulikhet.

Et trestykke var 40 cm langt.

Det ble delt i 3 deler.

Lengdene (målt i cm) er

$2x - 5$

$x + 7$

$x + 6$

Hvor lang er den lengste delen?

Svar: _______________ cm

Vis framgangsmåten din (også om du bruker kalkulator).

Figur 4: Oppgave 1 fra TIMSS 2011 (TIMSS, u.d.-a).

Løs ulikheten.

$9x - 6 < 4x + 4$

Svar: ______________

Figur 5: Oppgave 2 fra TIMSS 2011 (TIMSS, u.d.-a).

$x + y = 12$ og $2x + 5y = 36$.

Hva er verdiene til x og y?

(A) $x = 2, y = 10$

(B) $x = 4, y = 8$

(C) $x = 6, y = 6$

(D) $x = 8, y = 4$

Figur 6: Oppgave 3 fra TIMSS 2011 (TIMSS, u.d.-a).

Av oppgaver som ikke er frigitte fra TIMSS 2011, har jeg valgt ut noen som omhandler likninger, da det ikke var flere oppgaver med ulikheter. Jeg har gitt en kort forklaring på hva de utvalgte oppgavene omhandler:

- Oppgave 4: Dette er en enkel lineær likning med et ledd på hver side av likhetstegnet. Likningen inneholder kun en variabel på en side av likhetstegnet. Dette er en flervalgsoppgave.
- Oppgave 5: Dette er en flervalgsoppgave med en likning som har to ledd på hver side av likhetstegnet. Oppgaven består av å velge hvilket alternativ som er et riktig trinn i løsningen ved å samle sammen like ledd på hver side av likhetstegnet.
- Oppgave 6: Dette er en likning med ett ledd på hver side av likhetstegnet. Begge leddene er brøk og den ene har en variabel i nevneren.

- Oppgave 7: I denne flervalgsoppgaven skal man sette opp ett likningssett ut ifra informasjonen gitt i tekstoppgaven. Det er to personer som er ute og handler to ulike varer hver. Likningssettet forteller noe om pengebruken der x og y står for antall varer av de to ulike varene.

Tabellen under (Tabell 1) viser resultater fra Norge, Singapore og det internasjonale gjennomsnittet til de utvalgte oppgavene. Dataene er hentet fra TIMSS-databasen (Foy, Drucker & Stanco, 2013). Det er veldig store forskjeller i resultater mellom landene i alle oppgavene. Norge ligger langt under gjennomsnittet mens Singapore ligger langt over. I prinsippet kan man gjette seg til riktig svar ved flervalgsoppgaver. Av de eksemplene over er det oppgave fire Norge har skåret høyest på. Likevel har Singapore skåret mye høyere enn Norge.

Oppgave	1	2	3	4	5	6	7
Norge	0,4 %	1,3 %	30,5 %	39,2 %	21,7 %	10,5 %	30,9 %
Singapore	53,4 %	44,2 %	83,7 %	85,2 %	70,3 %	73,6 %	71,0 %
Int. gj.snitt	10,6 %	17,3 %	49,6 %	48,8 %	43,2 %	27,1 %	39,4 %

Tabell 1: Oversikt over resultater fra utvalgte oppgaver.

3.3.4 Hva må man ha lært for å løse de utvalgte oppgavene?

De syv oppgavene har ikke kun én løsningsmetode og kan derfor løses på ulike måter med ulike regnemetoder. I alle algebraoppgavene må man ha kunnskap om begrepet variabel. Videre må man ha kjennskap til betydningen av et likhetstegn eller et ulikhetstegn. Man må i tillegg ha kunnskap om prioritering av regneoperasjoner. Jeg skal nevne flere regler som vanligvis benyttes for å løse likninger og ulikheter. Addisjonsregelen tilsvarer addering av tall eller variabel på begge sider av likningen/ulikheten. Subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsregelen er operasjoner på tilsvarende måte på begge sider av likhetstegnet. Nedenfor er det listet opp andre kunnskapskomponenter som kreves for å løse oppgavene.

- Oppgave 1: Denne oppgaven krever at elevene har kjennskap til tekstoppgaver. Man må først finne en strategi for å løse oppgaven, implementere strategien og deretter konkludere (Lithner, 2003). Det er ikke implisitt gitt at oppgaven skal løses ved hjelp av en likning, men det er sannsynligvis den mest effektive måten å gjøre det på. Det er meningen at elevene skal sette opp en likning, bruke subtraksjons-, addisjons- og divisjonsregelen for å finne x og deretter tolke oppgaven igjen for å sette inn verdien i ett av uttrykkene for å finne svaret. Dette er en vanskelig oppgave som krever flere trinn for å løse problemet.

- Oppgave 2: ”Oppgaven er en ulikhet som stiller relativt store krav til formell matematisk kompetanse i algebra” (Grønmo et al., 2012, s. 46). Dette er en oppgave som krever at elevene først og fremst har kompetanse i å løse likninger før de lærer å løse ulikheter. Man må ha kunnskap om hvordan man bruker subtraksjons-, addisjons- og divisjonsregelen. Dette læres vanligvis ved å jobbe med likninger. Regneregler for multiplikasjon med negativ fortegn kan også være nødvendig.

- Oppgave 3: Innsettingsmetoden er et eksempel på en metode for å løse oppgave 3. Likevel er dette på et høyere nivå og består av to likninger med to ukjente. Da dette er en flervalgsoppgave, kan elevene sette inn svarene og se hvilken alternativ som stemmer. Her må man vite at venstre side må være lik høyre side for å komme frem til riktig svar.

- Oppgave 4: Dette er en enkel lineær likning som krever at eleven kan bruke divisjonsregelen. Løsningen må gjøres om fra en uekte brøk til et blandet tall for å finne riktig alternativ. Sistnevnte er et matematisk konsept som elevene skal ha lært i tallregningen.

- Oppgave 5: Dette er en flervalgsoppgave. Man samler sammen like ledd på hver side av likhetstegnet ved å bruke addisjons- og subtraksjonsregelen. Det gjelder å holde styr på fortegnene slik at man finner riktig svaralternativ.

- Oppgave 6: Denne oppgaven kan løses ved å bruke multiplikasjons- og divisjonsregelen. Man må ha kjennskap til at variabelen må være i telleren for å løse likningen.

- Oppgave 7: For å kunne løse denne oppgaven, må man på samme måte som i oppgave 1 finne en strategi for å gjøre om teksten til det matematiske symbolspråket. Ut ifra tekstoppgaven og svaralternativene ser man at det må være ett likningssett med to ulike variabler: x og y. For å kunne sette opp de to likningene må man identifisere de ukjente, bruke variablene for å representere de ukjente verdiene og finne likninger basert på informasjonen som er gitt i oppgaven. For å sette opp likningssettet, må man ha forståelse for at x representerer det samme for begge likningene, tilsvarende for y.

3.4 Skolesystemer

For å kunne sammenligne lærebøker fra Norge og Singapore, er det nødvendig å ha litt kjennskap til de ulike skolesystemene. Nedenfor vil jeg gi en beskrivelse av de to systemene.

3.4.1 Skolesystemet i Singapore

I Singapore er skolesystemet delt inn i tre deler, 6 – 4 – 2. Det er først seks år med primary school, fire år med secondary school og deretter to år med pre-university. Det er obligatorisk å gå på skole og de fleste foreldre vil at barna skal få ti års generell utdannelse (Yoong & Hoe, 2009, s. 20). Førskole er ikke obligatorisk og heller ikke en del av det formelle utdanningssystemet. Likevel har de aller fleste førsteklassingene gått i førskolen. I 2010 gjaldt dette for 98 % av førsteklassingene. Det er bare primary school som er obligatorisk, men de fleste fortsetter i secondary school (Yoong & Hoe, 2009). Nedenfor er det lagd en tabell som gir en oversikt over utdanningsnivåene der elevenes alder er inkludert. Tabellen er et utsnitt fra tabellen i boken til Chin et al. (2012, s. 801-803).

Alder	Utdanningsnivå	Trinn
3+ til 5+	Førskole (uformelt)	Barnehage 1 og 2
6+ til 11+	Primary	P1 – P6
12+ til 13+	Lower secondary: 1. Express 2. Normal (Academic) 3. Normal (Technical)	S1 – S2
14+ til 15+	Upper secondary: 1. Express	S3 – S4: O-Level Exam
	Upper secondary: 2. Normal (Academic) 3. Normal (Technical)	S3 – S4: N-Level Exam (N5: O-Level Exam)
16+ til 17+	Pre – university på Junior College eller Centralised Institute	JC1 – JC2 CI1-CI3
12+ til 17+	Integrert program direkte til A-Level Exam	
19+	Universitet / Arbeid	

Tabell 2: Oversikt over strukturen til utdanningssystemet i Singapore.

Når elevene starter i secondary school, har de tre muligheter for kursvalg. ”Express”, ”Normal (Academic)” og ”Normal (Technical)”. ”O” står for Ordinary og ”N” står for Normal. ”Normal (Academic)” og ”Normal (Technical)” er for de svake elevene, men ”Technical” er for de svakeste. Elevene blir inndelt i kurs basert på deres resultater fra PSLE, *Primary School Leaving Examination* (Yoong & Hoe, 2009, s. 16). PSLE er den siste testen og utføres i slutten av Primary six (Ministry of Education, 2013). ”Express”, ”Normal (Academic)” og ”Normal (Technical)” har hver sin læreplan. Etter fire år avsluttes ”Express”" med en O-Level eksamen, mens de to ”Normal" retningene avsluttes med en N-Level eksamen. Elever som skårer høyt på N-Level eksamen kan gå ett år ekstra for å ta en O-Level eksamen. O-Level eksamen blir utgangspunktet for å studere videre (Yoong & Hoe, 2009, s. 21). Ifølge Chin et al. (2012, s. 803) er det for tiden omtrent 60 % som går på ”Express”, 25 % på ”Normal (Academic)” og 15 % på ”Normal (Technical)”.

I Singapore brukes det flere timer i uken på matematikk for svake elevene slik at de får muligheten til å bedre forståelsen og resultatene. Timefordelingen for matematikkundervisningen er delt inn i perioder der hver periode er på 35-40 minutter. Det er fem perioder i secondary school for ”Express”, seks for ”Normal (Academic)” og åtte eller ni for ”Normal (Technical)” per uke (Yoong & Hoe, 2009, s. 22). For flertallet tilsvarer det omtrent tre klokketimer i uken. Skoleåret i Singapore starter 2. januar og varer til midten av november. Skoleåret består av fire ti-ukers semestere (Yoong & Hoe, 2009, s. 29). Det vil si at et skoleår er omtrent et kalenderår.

3.4.2 Skolesystemet i Norge

Alle elever i Norge har rett på tretten års gratis skolegang, ti av disse årene er obligatoriske. Elevene skal få samme opplæring fra første- til tiende-klasse (Onstad & Grønmo, 2012). De skal derfor delta i de samme fagene. Det er få muligheter for alternative fag og det er ingen nivågruppering. På denne måten skapes det ingen forskjeller mellom elever i skolesystemet selv om forskjellen på elevene i den enkelte gruppen vil variere mer. Det er verken obligatorisk eller gratis å gå i barnehage, men alle barn har rett til å få barnehageplass (Reisegg & Askheim, u.d.). Nedenfor er det lagd en tabell ut ifra strukturen til utdanningssystemet i Norge. Hvilken alder elevene starter på skolen er hentet fra Onstad og Grønmo (2012).

Alder	Utdanningsnivå	Trinn
→ 5	Barnehage/Førskole	-
5+ til 12+	Barneskole	1. – 7. trinn
12+ til 15+	Ungdomsskole	8. – 10. trinn
15+ til 18+	Videregående skole: Studiespesialisering Yrkesfag	Vg1 – Vg3
18+	Høyere utdannelse eller jobb	

Tabell 3: Utsnitt av strukturen til utdanningssystemet i Norge.

Elever søker seg inn på videregående skoler og linjer etter ungdomsskolen. Karakterer på ungdomsskolen gir grunnlag for hvilken videregående skole og linjer de kommer inn på. Det er ikke obligatorisk å gå på videregående skole, men flertallet av elevene velger dette. Grunnleggende eller allmenne fag er felles for alle, men de kan velge ulike programmer eller linjer (Onstad & Grønmo, 2012; Utdanningsdirektoratet, u.d.).

I grunnskolen, som er 1.-10. trinn, har det blitt satt av mer tid til matematikk i det nye kunnskapsløftet (Onstad & Grønmo, 2012). Timefordelingen i matematikk for 8.-10. trinn var 313 klokketimer i 2011, slik er det i dag også (Onstad & Grønmo, 2012, s. 670). Med unntak av ferier og helligdager blir det omtrent 37 undervisningsuker i året. Det tilsvarer omtrent 2,8 klokketimer med matematikk i uken (Utdanningsdirektoratet, 2011). For enkeltelever kan skoleeier omdisponere inntil 25 % av timeantall i fag for svake elever. Dette forutsetter en administrativ beslutning og er derfor ikke en rettighet (Kunnskapsdepartementet, 1995).

Skoleåret starter omtrent i midten av august det året eleven fyller 6 år og avsluttes i midten av juni (Utdanningsdirektoratet, 2011).

3.5 Læreplan

Lærebøkene som brukes på skolen er knyttet til læreplanen i landet. Læreplanen er en forskrift som danner hovedgrunnlaget for mål i skolen, og disse læreplanene endrer seg vanligvis når det kommer nye reformer eller revideringer. I de følgende delkapitlene vil jeg presentere kompetansemål i læreplanen for de aktuelle områdene i secondary one for Singapore og 8. trinn for Norge.

3.5.1 Læreplaner i Singapore

Den nyeste læreplanen i Singapore for secondary school er fra 2013. Ettersom jeg i denne oppgaven bruker TIMSS-oppgaver fra 2011, benytter jeg meg av eldre læreplan fra 2007. ”Express”, ”Normal (Academic)” og ”Normal (Technical)” har som nevnt tidligere egne læreplaner (Chin et al., 2012). Fordi det er tre ulike læreplan, O – Level, N(A) – Level og N(T) – Level for henholdsvis ”Express”, ”Normal (Academic)” og ”Normal (Technical)”, har jeg valgt å kun se på læreplanen for ”Express”, fordi flertallet går denne retningen. Kompetansemålene for matematikk er delt inn i tre hovedområder. ”Numbers and Algebra”, “Geometry and Measurement” og “Statistics and Probability”. Numbers and Algebra har igjen underområder hvor vi finner kompetansemål for likninger og ulikheter (Ministry of Education, 2014).

Solutions of equations and inequalities	Include: • solving linear equations in one unknown (including fractional coefficients) • solving simple inequality (e.g. $3x \le 5$) • solving simple fractional equations that can be reduced to linear equations, e.g. * $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 3$ * $\frac{3}{x-2} = 6$ • formulating a linear equation in one unknown to solve problems

Figur 7: Utsnitt fra O – Level læreplanen (Ministry of Education, 2007b).

Utsnittet fra O – Level læreplanen viser blant annet eksempler på hvilke typer likninger og ulikheter elevene skal lære. Det er oppgitt at elevene skal kunne løse lineære likninger og ulikheter, likninger med brøk og å kunne formulere en lineær likning med én ukjent for å løse problemer.

3.5.2 Den norske læreplanen

Lanseringen av kunnskapsløftet 2006 medførte nye læreplaner. Læreplanene har i ettertid blitt revidert og i dag bruker vi læreplanen fra 2013 (Utdanningsdirektoratet, 2013). I denne studien skal jeg bruke den reviderte læreplanen fra 2010 på grunn av TIMSS 2011. På ungdomstrinnet er det en felles læreplan for 8. til 10. trinn. ”Læreplanen for fagene inneholder formål, hovedområder, omtale av grunnleggende ferdigheter, kompetansemål og bestemmelser om sluttvurdering i faget” (Onstad & Grønmo, 2012, s. 670). Vi skal se på kompetansemålene.

På grunn av at læreplanen går over tre år blir det problematisk å undersøke kompetansemålene for kun 8. trinn. Det er derfor nødvendig å undersøke felles måloppnåelse for alle tre trinnene. Da det ikke er gitt retningslinjer for hva som skal ha blitt oppnådd etter 8. trinn, står skolene og lærebøkene friere til å prioritere eller velge hva som skal bli lært til enhver tid i de tre skoleårene (Reisegg & Askheim, u.d.).

Kompetansemål for matematikk 8.-10. er fordelt inn i fem hovedområder. ”Tall og algebra”, ”Geometri”, ”Måling”, ”Statistikk, sannsynlighet og kombinatorikk” og ”Funksjoner” (Onstad & Grønmo, 2012, s. 670). Kompetansemål for likninger og ulikheter befinner seg under hovedområdet ”Tall og algebra” og sier som følger: ” Løyse likningar og ulikskapar av første grad og likningssystem med to ukjende” (Utdanningsdirektoratet, 2010).

3.5.3 Når blir elevene introdusert for algebra?

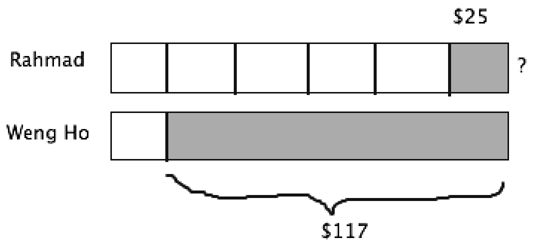
Likninger og ulikheter presenteres for første gang på de trinnene jeg undersøker. Det er også nødvendig å ta hensyn til når elevene blir introdusert for algebra. Dette er fordi variabelbegrepet, abstrakt tenkning og flere andre momenter kan være forkunnskaper og ferdigheter som de har nytte av ved oppstart av et nytt konsept innenfor algebra. Som nevnt tidligere er algebra et abstrakt felt som trenger modning over tid. Derfor kan noen elever få et forsprang dersom algebra er systematisk introdusert tidligere.

I følge felles læreplan for 5.-7. trinn revidert i 2010, står det ikke noe i kompetansemålet under ”Tall og algebra” om at elevene skal jobbe med algebraiske uttrykk (Utdanningsdirektoratet, 2010). Ifølge læreplanen er det ikke før på ungdomsskolen at elevene får en formell introduksjon til algebra. I Singapore starter de derimot tidligere enn i Norge. I dette kapittelet skal jeg undersøke hvilke forkunnskaper singaporske elever har før secondary one.

Singaporske elever blir ifølge læreplanen introdusert for algebra i primary six, det er året før de starter på secondary one. Under algebradelen i læreplanen er det en liste over hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene skal ha om algebraiske uttrykk (Ministry of Education, 2007a, s. 32). ”*My pals are here*” er en av lærebøkene som brukes i primary six. Boken starter med aritmetikk og generaliserer dette til algebra. De får øvelser som går på å sette opp uttrykk fra tekst og skrive tekst fra utrykk (Kheong, Soon & Ramakrishnan, 2009). Det meste av kapittelet består av elementer som elevene kan relatere til hverdagen, men også rent matematiske kontekster der de blant annet skal forenkle algebraiske uttrykk og sette inn verdier for variabler i uttrykk. I primary six er fokuset på konstruksjon, manipulering og evaluering av algebraiske uttrykk med en variabel. I secondary one starter konstruksjon og løsning av algebraiske likninger (Ng & Lee, 2009a). Dette kan bety at den algebraiske modningsprosessen til singaporske elever er kommet lenger når likninger og ulikheter introduseres.

3.5.4 The Model Method

I primary og secondary jobber elevene med “word problems”, såkalte tekstoppgaver. Disse tekstoppgavene blir løst ved å bruke ”The Model Method” som et problemløsningsverktøy. Dette er en del av læreplanen og elevene lærer dette allerede i ung alder. Allerede i 1.-2. trinn starter elevene med å bruke ” The Model Method”. Tegnefigurer blir brukt for å modellere informasjon som er gitt i tekstoppgavene. Med årene øker abstraksjonsnivået ved å bruke rektangler i stedet for figurer (Ng & Lee, 2009b, s. 284). Rektangler brukes for å representere tall eller variabler, alt ettersom hvilken trinn de går på og om algebra er introdusert. Rektanglene av ulike lengder brukes for å representere tall av ulik størrelse (Ng & Lee, 2009a). Forskning har vist at ved bruk av visuelle og konkrete konstruksjoner vil ytelsen forbedres med jobbing av tekstoppgaver (Ng & Lee, 2009b, s. 284-285). Et eksempel fra primary five er skissert nedenfor og oppgaven er som følger: Rahmad og Weng Ho hadde like mye penger. Etter at Rahmad kjøpte en skjorte for $25 og Weng Ho et par sko for $117, hadde Rahmad fem ganger så mye penger som Weng Ho. Hvor mye penger hadde Rahmad i utgangspunktet? (Ng & Lee, 2009a, s. 173-174; 2009b).



Figur 8: Skisse ved hjelp av ”The Model Method” (Ng & Lee, 2009a, s. 174-175).

Dette er en algebraisk tekstoppgave som elevene lærer å løse uten å konstruere algebraiske uttrykk med variabler. Fire rektangler er lik $117 - $25 = $92. En boks blir da $92 / 4 = $23. Rahmad hadde i utgangspunktet $25 + $23 * 4 = $140 (Ng & Lee, 2009a, s. 175). Denne metoden krever derfor ikke at man bruker en variabel for å sette opp et uttrykk. Likevel blir elevene nødt til å finne en problemløsningsmetode for å løse oppgaven. Slike problemløsningsmetoder brukes også i algebra. En tilsvarende problemløsningsverktøy er ikke en del av læreplanen i Norge.

4 Metode

I denne delen av oppgaven blir det redegjort for valg og vurderinger som er gjort underveis i forskningsprosessen. Det gis først en tilnærming til metoden, deretter blir det klargjort hvilket utvalg studien tar for seg, før det blir gitt en beskrivelse av analysen. Til slutt diskuteres validiteten knyttet til denne forskningen.

4.1 Valg av metode

De to forskningsspørsmålene som jeg formulerte for å svare problemstillingen var som følger:

III. Hva skiller presentasjonen av likninger og ulikheter i utvalgte lærerbøker på 8. trinn i Norge og secondary one i Singapore?

IV. Hvordan skiller oppgavene seg på det kognitive nivået i de utvalgte singaporske og norske lærebøkene?

For å besvare forskningsspørsmålene, har jeg brukt det metodiske rammeverket fra en tidligere forskning av Hong og Choi (2014). I likhet med denne masteroppgaven er den tidligere forskningen en sammenligning av lærebøker fra ulike land. For å besvare første forskningsspørsmål har jeg i hovedsak undersøkt forskjeller i lærebøkenes innhold og oppbygning, hvordan nye begreper og ulike områder blir presentert, i hvilken kontekst områdene likninger og ulikheter blir presentert, og i hvor stor grad likninger og ulikheter har plass i læreverkene. Kodingsmanualen fra rammeverket til Hong og Choi er brukt for å besvare det andre forskningsspørsmålet. Fire kognitive nivåer er definert og hver oppgave er kategorisert ut ifra hvilket kognitivt nivå oppgaven fordrer. Dette er oppgaver innenfor likninger og ulikheter.

”Ulike forskningsdesign og metoder kan på hver sin måte bidra til å belyse de mekanismer og strukturer man ønsker kunnskap om, enten de plasseres innenfor kvantitativ eller kvalitativ metodologi” (Hjardemaal, 2011, s. 210-211). Derfor er det viktig å være klar over hvilke strukturer man vil belyse i masteroppgaven for å finne en riktig metode til forskningen. Like viktig er det å ha formulert en problemstilling som best mulig forklarer hva studien omhandler. Det er vanlig å anta at man ut ifra problemstillingen kan se hva slags forskningsmetode som er brukt i oppgaven, enten det er en kvalitativ eller en kvantitativ metode (Kleven, Hjardemaal & Tveit, 2011).

Kort sagt anvender kvalitative metoder mye data fra et smalt felt og går i dybden innenfor dette feltet, mens kvantitative metoder består av det som er kvantifiserbart og favner en bredere datamasse (Ary, Jacobs, Razavieh & Sorensen, 2010; Hovdenak, 2013). Jeg har valgt å bruke en kvalitativ metode til dette forskningsprosjektet. Dokumentanalyse er brukt som datainnsamlingsmetode for å besvare begge forskningsspørsmålene. For å undersøke hvilket grunnlag elevene har før de gjennomfører TIMSS-undersøkelsen, er det gunstig å undersøke hva de lærer. Det elevene skal lære fremstår ofte som dokumenter, enten det er læreplan eller lærebøker. En kvalitativ tilnærming kan belyse innholdet til lærebøkene mer grundig ved å gå i dybden på et smalt felt og se på detaljer i læreverkene. Tilnærmingen vil begrense antall dokumenter og tidsbegrensningen man har i en masteroppgave åpner ikke for muligheten til å se på et stort antall læreverk. Dokumentanalyse som datainnsamlingsmetode fokuserer ofte på hva som blir sagt og hvordan et argument, en idé eller et konsept utvikles. I tillegg fokuseres det med den typen analyse på hva som ikke blir sagt, altså hva som mangler eller blir utelatt (Flick, 2007, s. 111). En slik metodetilnærming er nyttig i en sammenligningsprosess mellom lærebøker da det skal undersøkes hva som skiller disse lærebøkene ved å sammenligne de ulike komponentene innenfor et område. Det kan være alt fra konseptutvikling til hvordan det presenteres.

4.2 Utvalg

4.2.1 Hvorfor analyse av lærebøker?

Det kan være flere årsaker til at Norge ligger langt nede på TIMSS-skalaen. Man kan stille seg spørsmål om hvorvidt det kan ha noe å gjøre med læreplanen eller lærebøkene. Valg av lærebokanalyse kommer blant annet av et spørsmål som lærere ble stilt i TIMSS-undersøkelsen om hvor mye de brukte læreboken som undervisningsgrunnlag (Grønmo, Borge & Onstad, 2013). Alternativene var som følger: ”som undervisningsgrunnlag”, ”som supplement” eller ”bruker ikke”. Det viste seg at 94 % av de norske lærerne på 8. trinn svarte at de brukte læreboken som undervisningsgrunnlag, 6 % svarte at de brukte boken som supplement og ingen svarte det siste alternativet om at de ikke brukte læreboken som undervisningsgrunnlag (Grønmo, Borge & Onstad, 2013, s. 165-166). I Singapore svarte lærerne henholdsvis 59 %, 38 % og 3 % på de ovenfor nevnte alternativene (Mullis et al., 2012, s. 394). Det kan tyde på at læreboken er mer styrende i norske matematikktimer enn i singaporske. Innholdet i disse lærebøkene kan derfor se ut til å ha en større påvirkningsevne på norsk undervisning og kan derfor muligens forklare noe av de svake resultatene i TIMSS. For Singapore er det derimot annerledes fordi de ikke er så avhengig av læreboken som oss. Det var større prosentandel av lærere i Singapore som svarte at de kun brukte læreboken som supplement enn i Norge. Likevel ligger Singapore på andreplass i TIMSS. Andre faktorer påvirker TIMSS-resultatene, men over halvparten av lærerne brukte læreboken som undervisningsgrunnlag og lærebøkene sier derfor noe om hva elevene har blitt undervist i. Målet med denne masteroppgaven er å undersøke om norske lærebøker er tilrettelagt slik at elevene kan mestre TIMSS-oppgavene sammenlignet med en singaporsk lærebok. Sammenligning av lærebøker vil ikke alene kunne besvare hvorfor norske elever skårer så svakt i algebra på 8. trinn. Gjennom TIMSS kan man undersøke hvilke kunnskaper og ferdigheter elevene har. Lærebøkene viser seg å være svært relevante når det kommer til hva elevene undervises i i den norske skolen og kan dermed være en viktig faktor for resultatene.

Jeg har valgt å se på algebra i lærebøkene siden TIMSS viser at norske elever presterer svakest i dette emneområdet. Det er dessuten størst gap mellom resultatene i algebra for Norge og Singapore. Etter å ha lest i TIMSS-rapporten, vekket dette oppmerksomheten min og jeg ble nysgjerrig på hvorfor vi ligger under gjennomsnittet internasjonalt. I tillegg er algebra det området i matematikken som interesserer meg mest og dermed kunne tenkt meg å se nærmere på. Hovedområdet algebra i TIMSS-rammeverket er som nevnt tidligere delt inn i tre emner. Jeg har valgt å se på likninger og ulikheter under emnet ”Likninger/formler og funksjoner”.

Et interessant poeng er at vi i Norge ikke lenger har et godkjenningssystem for lærebøker (Onstad & Grønmo, 2012, s. 679). Tidligere hadde NLS – *Nasjonalt Læremiddelsenter* autorisasjon til å godkjenne norske lærebøker. I 2000 ble systemet opphevet og vi har fra da av ikke hatt en slik ordning (Bratholm, 2001). Det som ligger til grunn når lærebokforfattere skriver lærebøker er kompetansemålene i læreplanen og man kan diskutere om disse gir en detaljert nok beskrivelse av hva elevene skal lære. Jeg har gitt en kort kommentar på dette ved å sammenligne kompetansemålene i den norske og den singaporske læreplanen i kapittel 6. I kapittel 5 har jeg analysert lærebøker. Der blir det sett nærmere på hvor mye lærebøkene kan variere på samme trinn.

I Singapore har de et godkjenningssystem for lærebøker. Lærebøkene blir vurdert av et panel som inkluderer læreplanspesialister, lærere og akademikere fra universitetet. De fleste skoler benytter seg av godkjente bøker og de resterende må forsikre seg om at bøkene de velger å benytte seg av har et innhold som oppfyller kompetansemålene (Ministry of Education, 2012a, 2012b).

4.2.2 Hvilke skoletrinn?

I denne studien har jeg først og fremst tatt hensyn til elevenes alder og ikke hvilket klassetrinn de går på. Dette fordi elevene i Norge begynner på skolen ett år tidligere enn elevene i Singapore (Grønmo et al., 2012). I gjennomsnitt var singaporske elever 14,4 år og norske elever var 13,7 år i 2011 (Grønmo et al., 2012, s. 13). Singaporske elever var altså eldre enn norske elever i TIMSS-undersøkelsen i 2011. Grunnen til at det skapes en aldersforskjell for enkelte land er at TIMSS har definert populasjonen i undersøkelsen etter antall års skolegang. Elevene starter på skolen det året de fyller 6 år i Norge. Noen land har førskole for elever i denne alderen, men det klassifiseres ikke som skole (Grønmo et al., 2012, s. 125). Singapore er et av de landene som tilbyr førskole der omtrent alle elever deltar (Chin et al., 2012, s. 801).

Denne studien tar for seg lærebøker fra 8. trinn i Norge og secondary one i Singapore, som tilsvarer 7. trinn. Dette er først og fremst som nevnt ovenfor på grunn av alder, men også fordi det er her de lærer å løse likninger og ulikheter for første gang. Hadde jeg sett på henholdsvis 8. trinn og secondary two, ville forskjellene i kompetansemålene vært mye større. Fordi likninger og ulikheter introduseres først i 8. trinn i Norge og secondary one i Singapore, vil det derfor være mer naturlig å sammenligne disse.

4.2.3 Hvilke lærebøker og oppgaver?

Det er ikke mulig å få en oversikt fra forlagene over hvilke lærebøker som brukes og selges mest i Oslo eller generelt i Norge uten å undersøke det selv. Derfor har jeg valgt noen tilfeldige, men jeg har prøvd å se på lærebøker fra ulike forlag slik at jeg får en større spredning i materialet. Når det gjelder bøker fra Singapore, har jeg kun valgt ett læreverk som består av to bind. Dette er ifølge Helmer Aslaksen (2014)[2] det mestselgende læreverket i

[2] Aslaksen, H. (2014, 22.05). [Personlig Kommunikasjon, mestselgende lærebok i Singapore].

secondary school. Boken vil derfor være representativ for lærebokundervisningen i Singapore. I hovedsak har jeg kun valgt en lærebok fordi jeg i større grad vil fokusere på de norske bøkene og bruke den singaporske til å sammenligne. Siden det er et godkjenningssystem i Singapore, læreplan for hvert trinn og mer detaljert læreplan sammenlignet med den norske, vil den singaporske læreboken være mer representativ enn de norske lærebøkene. Alle de utvalgte bøkene er kun grunnbøker og er som følger:

- Grunntall 8, Matematikk for ungdomstrinnet (Bakke & Bakke, 2011) – Elektronisk Undervisningsforlag AS, heretter nevnt som *Grunntall.*

- Maximum 8, Matematikk for ungdomstrinnet (Tofteberg, Tangen, Stedøy-Johansen & Alseth, 2013) – Gyldendal Norsk Forlag AS, heretter nevnt som *Maximum*.

- Faktor 1, Matematikk for ungdomstrinnet (Hjardar & Pedersen, 2006) – Cappelen Damm, heretter nevnt som *Faktor*.

- Tetra 8, Matematikk for ungdomstrinnet (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2010) – Det Norske Samlaget, heretter nevnt som *Tetra.*

- Discovering Mathematics 1A (Keung, Cheng & San, 2010) – Star Publishing Pte Ltd, heretter nevnt som *DM1A.*

- Discovering Mathematics 1B (Keung, Cheng & San, 2007) – Star Publishing Pte Ltd, heretter nevnt som *DM1B* (eller *DM1* for begge bindene).

Tetra er opprinnelig en svensk lærebok, men den er oversatt og brukt i norske skoler. *DM1A* er i utgangspunktet publisert første gang i 2007, i likhet med *DM1B*, men jeg har kun 4. opplag fra 2010. En annen ting å merke seg er at *Grunntall* og *Maximum* er fra henholdsvis 2011 og 2013. Det betyr at disse lærebøkene ikke ble brukt før TIMSS-undersøkelsen i 2011. *Grunntall* er en eldre lærebokserie, men siden jeg ikke fikk tilgang til en tidligere utgave, har jeg brukt den eksisterende som er 4. opplag fra 2011. Ifølge Elektronisk Undervisningsforlag AS ble 1.-3. opplag trykket i tidsrommet 2006-2009 (Engen, 2014)[3]. Innholdet i alle de fire opplagene er det samme, det er kun enkeltfeil som har blitt rettet opp (Engen, 2014). Dette har blitt diskutert med veilederne mine og vårt inntrykk er derfor at den nåværende utgaven ikke

[3] Engen, J. (2014, 20.05.14). [Personlig kommunikasjon, ulike utgaver av Grunntall 8].

nødvendigvis vil svekke resultatene i forhold til TIMSS 2011 i denne oppgaven. *Maximum* er derimot en ny utgave som ikke har eksistert før 2013. Dette verket var ikke tilgjengelig før TIMSS 2011, men det kan være interessant å se om den skiller seg ut fra de andre verkene. Dette vil i tillegg gi et helhetlig bilde av dagens lærebøker. De oppgavene fra TIMSS som ikke er frigitt vil gis om igjen i 2015 og sannsynligvis vil noen av de norske elevene ha brukt de ovenfor nevnte lærebøkene.

De utvalgte TIMSS-oppgavene fra 2011 er som nevnt i kapittel 3 både frigitte og ikke frigitte oppgaver. Jeg har valgt henholdsvis tre og fire av disse. Fordi det ikke var så mange oppgaver om likninger og ulikheter blant de frigitte oppgavene, valgte jeg å ta med noen av de ikke frigitte oppgavene selv om jeg ikke kan oppgi dem her. Det var kun én oppgave om ulikheter fra TIMSS 2011, derfor er flertallet av de utvalgte oppgavene om likninger.

Ettersom skoleåret starter på ulike tidspunkt i de to landene, blir også TIMSS foretatt slik at det blir rettferdig for alle. Undersøkelsen gjennomføres i slutten av skoleåret (TIMSS, u.d.-b). Denne oppgaven går ut ifra at elevene har blitt introdusert for algebra før den tid.

4.3 Analyse

4.3.1 Hvilket analytisk rammeverk?

Ved sammenligning av læreverk fra to ulike land, har jeg som nevnt tidligere valgt å bruke rammeverket fra en tidligere forskningsartikkel av Hong og Choi (2014) som analyseverktøy. Dette analytiske verktøyet har tidligere blitt brukt av mange andre forskere og er derfor ikke noe nytt. Hong og Chois artikkel består også av en sammenligning av lærebøker, men av koreanske og amerikanske lærebøker. De tok for seg kvadratiske likninger og analyserte innholdet i lærebøkene fra begge landene ved å se på ulike elementer i utvalgte områder i lærebøkene. Den ene delen av det analytiske rammeverket er hentet fra forskningsartikkelen til Stein, Grover og Henningsen (1996). I deres forskning ble en mengde matematikkoppgaver analysert og kategorisert ved hjelp av en kodingsmanual. Kodingsmanualen har blitt redigert av Hong og Choi i deres artikkel. Hovedanalysen består av et to-dimensjonalt rammeverk. Disse to dimensjonene har Hong og Choi hentet fra en annen forskningsartikkel av Charalambous, Delaney, Hus og Mesa (2010) og de to dimensjonene består av en horisontal analyse og en vertikal analyse. Kombinering av begge dimensjoner kan vise lærebøkenes karakterer og dermed styrke analysen, noe som kunne vært vanskelig ved hjelp av kun én dimensjon (Charalambous et al., 2010). Hong og Chois (2014) forskningsartikkel ser på ulike komponenter i de aktuelle kapitlene om kvadratiske likninger. De har både sett på overfladiske momenter og gått mer detaljert inn på innholdet. Dette er passende for denne studien fordi analysen både går i dybden og bredden og fanger opp data fra ulike områder.

4.3.2 Prosedyre og gjennomføring

Etter å ha valgt områdene likninger og ulikheter fra rammeverket til TIMSS, har jeg undersøkt hva som står i læreplanen til Norge og Singapore om dette. Treårsbolken i den norske læreplanen på ungdomsskolen gjør det problematisk med tanke på at det ikke er spesifisert hva elevene skal ha lært i utgangen av 8. trinn. Likevel har det vært nødvendig å undersøke læreplanen da lærere og lærebokforfattere først og fremst må forholde seg til den og det er derfor utgangspunktet for det elevene lærer. I den norske og den singaporske læreplanen står det som vist i underkapitlene 3.5.1 og 3.5.2 at elevene skal kunne løse likninger og ulikheter av første grad. Siden dette stod i begge læreplanene, gikk jeg videre med å undersøke lærebøkene.

Det er verdt å merke seg at rammeverket for denne analysen ikke er identisk med Hong og Choi sitt rammeverk. Det er naturlig at den horisontale og den vertikale analysen har blitt tilpasset fordi deres analyse var på et høyere matematisk nivå. Det innebærer at jeg har ekskludert og inkludert enkelte trinn i analysen etter hva jeg syntes har vært nødvendig for å finne data som kunne svare på forskningsspørsmålene mine. Kodingsmanualen til Hong og Choi har blitt benyttet med de samme kognitive nivåene, men med litt justeringer med tanke på hva kriteriene er for hvert nivå.

Horisontal og vertikal analyse

I den horisontale analysen har jeg undersøkt lærebøkene som en enhet. Dette har gitt et helhetlig bilde av hvordan forfatterne av bøkene har strukturert hver av områdene: likninger og ulikheter. Jeg har gitt en oversikt over antall oppgaver i likninger og ulikheter. Disse har blitt presentert hver for seg. Analysen har inkludert oversikt over *hvor* ulike temaer innenfor hver område befinner seg i lærebøkene, hvor stor andel av bøkene som er satt av til hver av område likninger og ulikheter, på hvilket trinn områdene blir presentert, og hvilke temaer som har blitt dekket innenfor de to områdene.

Den vertikale analysen består av to deler. Den første delen av analysen tar for seg ulike aspekter ved hver enkelt lærebok ved å se på hvordan de behandler matematiske konsepter. Den har gitt mer dybde og mer fokusert analyse på det matematiske innholdet. Først har introduksjonen av et nytt område blitt analysert og siden videreutviklingen av området. Analysen inkluderer hvordan hver av områdene har begynt, hvordan et konsept presenteres og anvendes, hva som karakteriserer kapittelet og hvordan det er oppbygd. Videre har jeg sett på konteksten, om boken bare har en ren matematisk kontekst eller også kontekst fra erfaringsverden, noe elevene kan relatere til hverdagen (Hong & Choi, 2014, s. 245). I noen deler av analysen har de to områdene blitt analysert sammen, andre ganger har de blitt sett på hver for seg. Det valget kommer av at noe av analysen er likt i noen av lærebøkene og det er derfor ikke hensiktsmessig å nevne en ting flere ganger.

Andre del av den vertikale analysen består av problemløsning av oppgaver. Det har blitt undersøkt hvilke kognitive nivåer oppgavene fordrer (Hong & Choi, 2014, s. 245). Oppgavene som omhandler likninger og ulikheter er undersøkt hver for seg i alle de utvalgte lærebøkene. De fire kognitive nivåene er inkludert i rammeverket og utgjør kodingsmanualen. Den består av følgende:

- Memorering, M
- Prosedyre uten kobling, P
- Prosedyre med kobling, PK
- Regne matematikk, RM

M og P blir ansett som lavt nivå og PK og RM som høyt nivå (Hong & Choi, 2014, s. 245). Oppgaver som har falt innenfor ”Memorering” inkluderer oppgaver som kan løses ved hjelp av samme algoritme som et av eksemplene i kapittelet. Algoritmer er presise beskrivelser av et sett operasjoner man utfører for å løse oppgaven. Operasjonene skjer i nøyaktig samme rekkefølge og antall ganger. ”Prosedyre uten kobling” inkluderer oppgaver som kan løses ved hjelp av prosedyrer fra eksempler i boken som består av samme fremgangsmåte. ”Prosedyre med kobling” inkluderer oppgaver som delvis kan løses med prosedyrer fra eksempler. Disse oppgavene krever kunnskap om konsepter som ikke er introdusert i det aktuelle kapittelet som oppgavene befinner seg i. ”Regne matematikk” inkluderer oppgaver der prosedyren ikke er innlysende og elevene må planlegge en problemløsningsstrategi for siden å sette opp en likning/ulikhet og eventuelt forklare løsningen til slutt. Det er verdt å merke seg at når jeg nevner eksemplene i boken så er det eksempler som er gitt tidligere i det aktuelle kapittelet eller samme delkapittel som det oppgaven befinner seg i. La oss tenke på et eksempel av en oppgave der prosedyren er gitt, og oppgaven krever bruk av den distributive lov som ikke presenteres før neste delkapittel. Da vil oppgaven kategoriseres som ”Prosedyre med kobling”. Den samme oppgaven blir kategorisert som ”Prosedyre uten kobling” dersom den distributive lov er presentert tidligere i kapittelet eller i samme delkapittel. Jeg vil komme nærmere inn på hva de ulike nivåene inneholder ved å gi eksempler senere i kapittelet.

Ved hjelp av kodingsmanualen har jeg kategorisert alle oppgaver innenfor likninger og ulikheter i hver delkapittel. Jeg har også inkludert oppgaver fra det oppsummerende delkapittelet som ofte kalles for ”prøv deg selv” og befinner seg i slutten av kapittelet. Resten av analysen, altså den horisontale og deler av den vertikale analysen har ikke et kodingssystem. Der forteller overskriften hva som er analysert.

4.3.3 Eksempler på klassifisering

For å vise hvordan jeg har kodet oppgavene med kodingsmanualen fra den vertikale analysen, har jeg valgt å gi et par eksempler på oppgaver fra de fire nivåene. Slik kan man se hvordan analysen er foretatt. Det er nødvendig å se på hva som er gjennomgått i kapittelet før man kategoriserer oppgavene for å kunne vurdere hvilket nivå oppgaven faller innenfor. Derfor har jeg også tatt med litt teori eller eksempler fra boken for å vise hvorfor de utvalgte oppgavene havner i de følgende kategoriene. Det har til tider vært problematisk å kategorisere oppgavene siden noen oppgaver har vært på grensen til å falle under flere enn ett nivå. Derfor blir det også gitt eksempler på oppgaver som har vært vanskelig å kategorisere slik at kodingen blir tydelig. Det har spesielt vært utfordrende å kategorisere tekstoppgaver. Dette er tekstoppgaver som enten har falt innenfor ”Prosedyre uten kobling” eller ”Prosedyre med kobling”.

Memorering

Dette nivået favner oppgaver som kan løses ved å herme etter gitte eksempler. Identisk algoritme fra et eksempel benyttes ved å bruke de samme regneoperasjonene i samme rekkefølge. Figur 9 er et eksempel med påfølgende løsningsforslag fra *Grunntall*. Her benyttes multiplikasjonsregelen for å løse likningen.

EKSEMPEL

Løs likningen $\frac{x}{5} = 6$.

LØSNING

$$\frac{x}{5} = 6$$

$$\frac{x \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = 6 \cdot 5$$ Vi skriver opp likningen på nytt og multipliserer begge sider med tallet under brøkstreken (nevneren).

$$\underline{\underline{x = 30}}$$ Vi regner ut og finner x.

Figur 9: Eksempel fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011, s. 294).

Algoritmen i eksempelet ovenfor kan benyttes for å løse oppgaver av samme type. Figur 10 viser tre oppgaver fra *Grunntall* der elevene kan bruke samme algoritme som eksempelet ovenfor. Det er kun verdiene som skiller seg ut og det er derfor mulig å herme etter eksempelet.

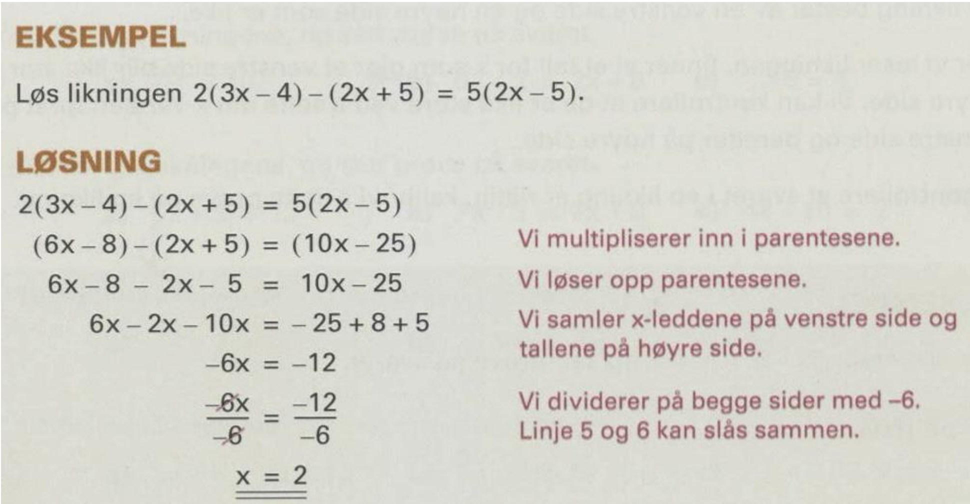
● **10.21** Løs likningene.

a) $\frac{x}{2} = 3$ **b)** $\frac{x}{4} = 2$ **c)** $\frac{x}{3} = 4$

Figur 10: Oppgaver fra kategori: "Memorering" (Bakke & Bakke, 2011, s. 294).

Prosedyre uten kobling

Oppgaver innenfor "Prosedyre uten kobling" krever prosedyre som er kjent fra kapittelet. Det betyr at anvendelse av de ulike regnereglene er kjent fra eksemplene, men lærebøkene gir ikke eksempler som viser hvilken rekkefølge man må bruke regnereglene som i nivået ovenfor. Eksempelet nedenfor viser hvordan *Grunntall* løser en likning med parenteser. Addisjons-, subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsregelen er kjent fra tidligere, samt flytte-bytteregelen.



EKSEMPEL

Løs likningen $2(3x - 4) - (2x + 5) = 5(2x - 5)$.

LØSNING

$$2(3x - 4) - (2x + 5) = 5(2x - 5)$$

$$(6x - 8) - (2x + 5) = (10x - 25) \quad \text{Vi multipliserer inn i parentesene.}$$

$$6x - 8 - 2x - 5 = 10x - 25 \quad \text{Vi løser opp parentesene.}$$

$$6x - 2x - 10x = -25 + 8 + 5 \quad \text{Vi samler x-leddene på venstre side og tallene på høyre side.}$$

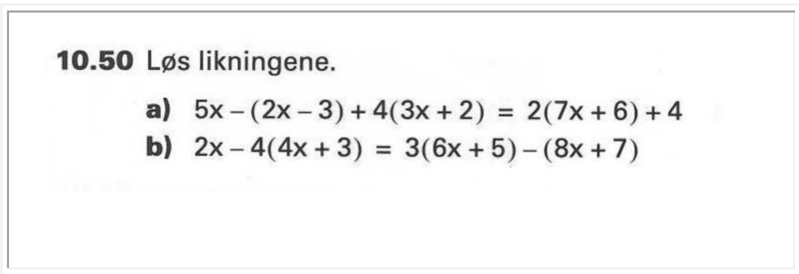
$$-6x = -12$$

$$\frac{\cancel{-6}x}{\cancel{-6}} = \frac{-12}{-6} \quad \text{Vi dividerer på begge sider med –6. Linje 5 og 6 kan slås sammen.}$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Figur 11: Eksempel fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011, s. 299).

Etter eksempelet er det i *Grunntall* gitt oppgaver der man kan bruke samme prosedyre for å løse oppgavene. Nedenfor er det gitt to eksempler på slike oppgaver i *Grunntall* fra samme delkapittel. De ulike regnereglene som trengs for å løse oppgaven er brukt i Figur 11, men man kan ikke bruke identisk fremgangsmåte, altså samme algoritme.



10.50 Løs likningene.

a) $5x - (2x - 3) + 4(3x + 2) = 2(7x + 6) + 4$

b) $2x - 4(4x + 3) = 3(6x + 5) - (8x + 7)$

Figur 12: Oppgaver fra kategori: ”Prosedyre uten kobling” (Bakke & Bakke, 2011, s. 300).

For å belyse kategoriseringen av tekstoppgaver har jeg også gitt eksempler på slike oppgaver. Figur 13 er ett eksempel på en oppgave fra *DM1A.* I *DM1A* er oppgaven gitt med påfølgende løsningsforslag og en skisse av oppgaven med ”The Model Method”. Løsningsforslaget er ikke tatt med i denne oppgaven. Figur 14 er en oppgave i *DM1A* der elevene kan bruke samme prosedyre som i eksempelet for å løse oppgaven.

Example 14 Mrs Li is 3 times as old as her daughter. In 5 years' time, the sum of their ages will be 62 years. Find the daughter's present age.

Figur 13: Eksempel fra *DM1A* (Keung et al., 2010, s. 125).

Try It 14! Mr Rashid is 4 times as old as his son. Four years ago, the sum of their ages was 37 years. Find the son's present age.

Figur 14: Oppgave fra kategori: ”Prosedyre uten kobling” (Keung et al., 2010, s. 125).

Prosedyre med kobling

Dette kognitive nivået skiller seg ut fra ”Prosedyre uten kobling” på den måten at det består av oppgaver som krever andre konsepter som ikke er presentert i kapittelet. Nedenfor er det gitt to oppgaver fra *Maximum*. I oppgave 5.79d må man blant annet bruke multiplikasjonsregelen. En slik type likning med brøk er ikke vist som eksempel i kapittelet om likninger. Oppgave 5.79e består av en brøk på høyre og venstre side, men man må også trekke inn andre konsepter som fellesnevner og den distributive lov. Dette er ikke nevnt i kapittelet. *Maximum* oppgir at man skal gjøre de samme operasjonene på begge sider av en likning, men det er ikke vist hvordan. Slike oppgaver er derfor litt mer krevende enn oppgaver fra det tidligere nivået.

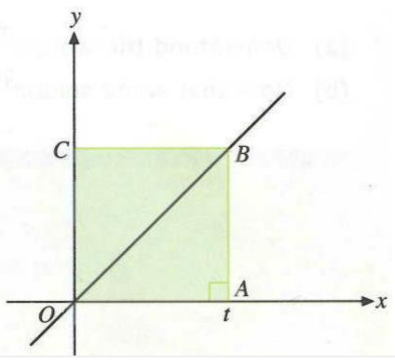
5.79 Løs likningene. Sjekk om løsningene stemmer.

d $\frac{3+x}{5} = 4$ **e** $\frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{2}(x-1)$

Figur 15: Oppgaver fra kategori: ”Prosedyre med kobling” (Tofteberg et al., 2013, s. 320).

For å se på hvordan jeg har kategorisert tekstoppgaver i denne kategorien har jeg hentet oppgaven fra *DM1B.* Figur 16 er en oppgave som krever at man kan bruke andre konsepter. For å både løse oppgave (a) og (b) må man kunne bruke omkretsen av et kvadrat.

8. The diagram shows a square $OABC$ of side t units. It has a perimeter that is not more than 20 units.
(a) Express the perimeter of the square in terms of t.
(b) Find the possible values of t.



Figur 16: Oppgaver fra kategori: "Prosedyre med kobling" (Keung et al., 2007, s. 100).

Regne matematikk

Dette er det vanskeligste kognitive nivået der algoritmen ikke er innlysende og fordrer at elevene må planlegge en problemløsningsstrategi, sette opp en likning/ulikhet, for så å forklare løsningen. Tekstoppgaven fra *DM1B* nedenfor skal løses ved hjelp av en ulikhet. Her er ikke algoritmen gitt, ulikheten er heller ikke satt opp og må derfor først gjøres om fra tekst til det matematiske symbolspråket. Oppgaven må så regnes ut og elevene må tilslutt tolke svaret.

9. The sum of 3 consecutive odd numbers is between 90 and 100. Find two possible sets of the 3 consecutive odd numbers.

Figur 17: Oppgave fra kategori: "Regne matematikk" (Keung et al., 2007, s. 98).

Unntak

Alle oppgavene har blitt kategorisert med unntak av én oppgave fra *Grunntall.* Den oppfyller ikke noen av kriteriene for de kognitive nivåene. I denne oppgaven skal elevene utforske ved å bruke et dataopplæringsprogram. Denne oppgaven har derfor blitt ekskludert fra denne analysen.

10.51 Dersom skolen har *Grunntall e8-10* eller et annet dataopplæringsprogram, kan du bruke det til å øve mer på å regne med likninger.

Figur 18: Oppgave fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011, s. 300).

4.4 Validitet

I samfunnsvitenskapelig forskning handler validitet om hvorvidt metoden eller instrumentet undersøker det den skal undersøke (Ary, Walker & Jacobs, 2014, s. 242; Kvale & Brinkmann, 2009, s. 250). Dette innebærer at valg av metode påvirker validiteten til studien der den enten styrkes eller svekkes. Maxwell bruker validitet til å referere nøyaktighet og troverdighet av en beskrivelse, forklaring, tolkning og så videre. (Maxwell, 2005, s. 106). Han introduserer nøkkelkonseptet for validitet: ”validity *threat*: a way you might be wrong” (Maxwell, 1996, s. 87-88). Dette omhandler hvilke strategier og metoder man benytter seg av for å ekskludere trusler mot validiteten (Maxwell, 1996). Det er flere momenter som kan påvirke ved å svekke studiens validitet. Videre i dette kapittelet trekkes det frem momenter som kan oppstå som trusler for validiteten, men også momenter som kan styrke validiteten.

4.4.1 Er utvalget representativt?

I dagliglivet generaliserer vi ofte ut ifra erfaringer og danner oss forventninger, både i enkelte situasjoner og med mennesker (Kvale & Brinkmann, 2009). I forskningen er det derimot ikke like enkelt. Utvalget av lærebøker i denne studien er fire norske lærebøker fra 8. trinn og en singaporsk lærebok som består av to bind fra secondary one. Som vi ser i kapittel 4.2.3, ligger representativiteten i det at alle de utvalgte lærebøkene er forfattet fra og med 2006 og i samsvar med læreplaner fra Kunnskapsløftet (Tangenten, 2006). Dette betyr også at bøkene, i likhet med andre bøker det undervises fra i forkant av TIMSS 2011, ikke har vært gjennom godkjenningssystemet som ble opphevet i 2000. Som jeg nevnte tidligere i dette kapittelet, er den singaporske læreboken representativ i kraft av at boken er mestselgende, og at i likhet med de andre bøkene i Singapore, har gått gjennom et felles godkjenningssystem.
Generaliserbarheten er begrenset på samme måtes som representativiteten. Funnene i denne studien begrenses kun til utvalget av lærebøker og til de kapitlene som er undersøkt. Selv om funnene ikke kan generaliseres, impliserer ikke det nødvendigvis at det vil være en trussel for

validiteten. Det er ikke krav om at enhver forskning nødvendigvis må være universell og gyldig for alle mennesker eller alle lærebøker og til enhver tid (Kvale & Brinkmann, 2009). Goldin (2000) mener at mangel på representativitet ikke alltid er en svakhet fordi generalisering nødvendigvis ikke er et mål man må søke mot. Jeg bør heller fokusere på å beskrive hvert trinn i metoden og analysen i mest mulig detalj.

4.4.2 Fordeler og ulemper knyttet til metoden

Som alle andre datainnsamlingsmetoder vil det være både fordeler og ulemper knyttet til metoden. ”Til forskjell fra f.eks. intervjumetoder (..) kan dokumenter bidra med data til analyser som ønsker å belyse en lengre periode eller en historisk utvikling” (Tanggaard & Brinkmann, 2012, s. 156-157). TIMSS som trendstudie gir blant annet oversikt over hvordan Norge og Singapore har prestert i algebra de siste årene og analyser knyttet til det. Dokumentanalyse åpner for muligheten til å trekke inn informasjon om elevenes matematiske forkunnskap før de foretok undersøkelsen i 2011 ettersom jeg kan få tilgang til eldre bøker, rapporter og læreplaner.

Meninger og antagelser jeg som forsker har på forhånd kan være med på å påvirke datamaterialet ved at jeg blir selektiv og velger ut ønskede resultater etter hva jeg for eksempel forventer å finne (Maxwell, 2005). Dette kaller Maxwell for ”researcher bias”. Jeg må altså minimere subjektiviteten for å minke risikoen. Med dette som bakgrunn har jeg forsøkt å være så objektiv som mulig ved å støtte meg til det teoretiske rammeverket.

Jeg som forskere har ikke vært med på å skrive dokumentene som er brukt i denne oppgaven. Dokumenteter er derfor først og fremst ikke skrevet for å bli brukt som data i analysen, i motsetning til for eksempel en spørreundersøkelse eller et intervju. Det er derfor ikke fare for at jeg som forskeren skal påvirke datamaterialet. Siden jeg er instrumentet i analysen, kan forståelse og oppfatninger påvirke analysen (Ary et al., 2010; Harder, 2013; Hovdenak, 2013). Ved å redegjøre for ulike valg og gi en god beskrivelse av analysen, kan metoden bli repliserbar. Dersom en annen forsker bruker samme metode og utvalg som denne oppgaven, skal våre resultater bli tilnærmet like. Jo bedre og grundigere forklaring jeg har av analysen, jo nærmere kan resultatene våre bli. Det er vanskelig å eliminere absolutt alle påvirkninger jeg kan gi i studien. Målet med kvalitativ studie er ikke å eliminere påvirkningene, men å gi forståelse for emnet for å kunne bruke det på en produktiv måte (Maxwell, 2005, s. 109). Det er derfor blant annet gitt en forklaring på kategorisering av oppgaver og hvordan kodingsmanualen ser ut. Oppgaver som har vært vanskelig å kategorisere, har blitt diskutert med veiledere slik at påvirkningskraften fra min forståelse av oppgavene er delvis begrenset. Det er en fordel fordi det blir enkelt for andre forskere å sjekke validiteten eller bruke samme verktøy i en annen studie. Dataene som ligger i dokumentene kan hentes frem igjen ved å bruke samme analyseverktøy, i motsetning til intervju som mest sannsynlig ikke vil kunne hente de samme dataene.

En svak side ved dokumentanalyse er at forskeren ikke kan stille spørsmål dersom det er hull i dokumentet eller dersom det mangler noe. Dataen er derfor begrenset til det som allerede eksisterer. I tillegg til ufullstendig, kan dataen være selektiv eller mangle objektivitet (Cohen, Manion, Morrison & Bell, 2011, s. 236). Siden noen av dokumentene ikke er laget for forskning, må jeg ta hensyn til hvorvidt det er fullstendig, selektivt eller mangel på objektivitet for det som skal undersøkes. I denne studien vil ikke dette være et problem for læreplanene. Læreplanene er hentet fra Utdanningsdirektoratet og Ministry of education for henholdsvis Norge og Singapore og er derfor verken forfalsket eller ufullstendige. Det samme gjelder for rammeverket til TIMSS som er hentet fra TIMSS-publikasjoner. Likedan er lærebøkene fullstendige og det er de bøkene elevene bruker i skolen.

5 Funn

I dette kapittelet vil jeg trekke frem funn knyttet til analysen. Først vil jeg vise hvordan lærebøkene presenterer begrepet variabel. Deretter vil jeg presentere funn fra den horisontale og den vertikale analysen. Jeg vil i hovedsak påpeke det som skiller lærebøkene.

Alle lærebøkene som er brukt i denne studien har ulik oppbygning. Bøkene fra Singapore har klasseaktiviteter både i likningskapittelet og i kapittelet om ulikheter. Disse aktivitetene skiller seg ut fra de andre regneoppgavene i boken. De er stort sett knyttet til hverdagslige konsepter og elevene skal lære matematikk gjennom oppdagelse. Det er ikke klasseaktiviteter i de norske lærebøkene. På grunn av vanskeligheter med å sammenligne denne typen oppgaver har jeg derfor valgt å se bort ifra klasseaktivitetene når jeg kategoriserer oppgaver, men de er med i analysen.

Tetra, som er en av de fire norske lærebøkene jeg har valgt å undersøke i denne masteroppgaven, skiller seg mest ut i første øyekast. Boka har et kapittel som heter algebra, men det finnes verken likninger eller ulikheter i algebrakapittelet eller som et kapittel for seg selv. Dette medfører at jeg ikke kan si noe om likninger og ulikheter for denne læreboka da forfatterne har valgt å introdusere likninger i *Tetra* 9 og ulikheter i *Tetra* 10.

5.1 Konseptet av en variabel i algebra

Hvordan lærebøkene introduserer begrepet variabel er ikke direkte en del av analysen. Likevel synes jeg at det er nødvendig å se på hvordan begrepet er introdusert ettersom variabel er et grunnleggende element for å forstå likninger og ulikheter og også for å forstå algebra.

I læreboken *DM1A* blir begrepet variabel presentert i et introduksjonskapittel til algebra. Læreboka introduserer dette i et eksempel der variabelen symboliserer antall kjeks. Eksempelet går fra å være aritmetisk til algebraisk ved å forklare at vi bruker symboler i stedet for endelige verdier og at algebra kan bli sett på som en forlengelse av aritmetikk av den grunn. Det blir ramset opp et par bokstaver som vanligvis blir brukt som symbol for variabler. I eksempelet blir n brukt som symbol for det ukjente tallet og dette kalles for en variabel.

Tetra forklarer begrepet variabel i starten av et eksempel. ”En variabel er noe som kan variere, noe som kan ha ulike verdier. Ofte skriver vi variabelen som en bokstav” (Hagen et al., 2010, s. 90).

Grunntall sier at tall som varierer erstattes med bokstaver for at vi skal kunne lage formler. En variabel er en bokstav som settes inn som symbol for et tall som varierer.

Maximum introduserer variabel et stykke inn i algebra kapittelet. ”I algebraiske uttrykk bruker vi bokstaver i stedet for noen av tallene. Et algebraisk uttrykk er derfor en slags formel der du kan bytte ut bokstavene med tall for å bestemme verdiene til uttrykket. Bokstavene kalles for variabler” (Tofteberg et al., 2013). Boken benytter seg likevel av et ukjent tall n tidligere i algebra kapittelet før en variabel blir forklart. Dette skjer i arbeid med figurtall der n i et eksempel blir beskrevet som et hvilket som helst figurnummer.

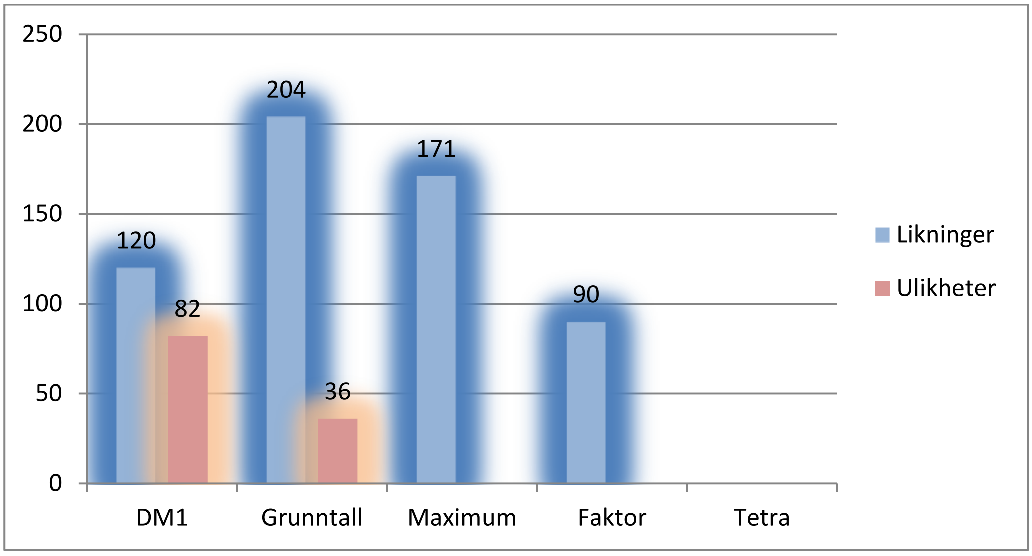
Faktor gir et eksempel hvor x-verdien i ett uttrykk forklares ved å være et symbol som skal stå for et varierende tall. Bokstaven er en variabel og den kan ha ulike verdier.

5.2 Horisontal analyse

Lærebøkene har ulik oppbygning og layout, noe som påvirker fordeling av tekst, oppgaver og eksempler. Nedenfor kommer en beskrivelse av hva de aktuelle kapitlene består av. Etter dette undersøkes innholdet mer i detalj i vertikal analyse.

5.2.1 Antall oppgaver i lærebøkene

Figuren nedenfor viser antall oppgaver som omhandler likninger eller ulikheter i lærebøkene. *Tetra* har som nevnt tidligere ikke introdusert likninger eller ulikheter i 8. klasse læreboken. Det er derfor heller ingen oppgaver bestående av likninger eller ulikheter. *Grunntall* skiller seg ut ved å ha flest oppgaver i likningskapittelet. Videre ser vi at bare én av fire norske lærebøker inneholder ulikheter. Diagrammet nedenfor inkluderer oppgaver fra hver av de aktuelle delkapitlene og blandede oppgaver i slutten av kapittelet.



Figur 19: Kolonnediagram over antall oppgaver i lærebøkene.

5.2.2 Plassering av likninger og ulikheter i lærebøkene

Med unntak av *Tetra*, er det små forskjeller i prosentandel som er lagt av til likninger i grunnbøkene. Med andre ord har bøkene fokusert omtrent like mye på å introdusere likninger. Tabellen nedenfor gir blant annet oversikt over fordelingen og plasseringen til likninger.

Lærebok	Klasse-trinn	Antall kapitler	Kapittel nummer	Antall sider i prosent	Totalt antall sider
DM1A	7	16	6	4,4 %	411
Grunntall	8	13	Deler av 10	3,1 %	350
Maximum	8	5	Deler av 5	3,4 %	328
Faktor	8	7	Deler av 6	4,5 %	265
Tetra	8	6	0	0	291

Tabell 4: Plassering og antall sider som består av likninger i prosent.

De norske lærebøkene har ikke fokusert på ulikheter på 8. trinn. Av fire lærebøker, er det bare forfatterne av *Grunntall* som har valgt å introdusere ulikheter i 8. klasse boka.

Lærebok	Klasse-trinn	Antall kapitler	Kapittel nummer	Antall sider i prosent	Totalt antall sider
DM1B	7	16	13	2,4 %	411
Grunntall	8	13	Deler av 10	1,7 %	350
Maximum	8	5	0	0	328
Faktor	8	7	0	0	265
Tetra	8	6	0	0	291

Tabell 5: Plassering og antall sider som består av ulikheter i prosent.

Videre vil jeg se på hvilke tema som blir introdusert og i hvilken rekkefølge dette skjer. Lærebøkene legger ulik vekt på de forskjellige temaene. Ettersom noen av lærebøkene ikke har nummerert delkapitlene, har jeg selv gjort dette ut ifra underoverskriftene i kapitlene for å gjøre det oversiktlig. Tabellene nedenfor viser en oversikt over delkapitlene for henholdsvis *DM1*, *Grunntall*, *Maximum* og *Faktor*.

Delkapittel	Tema
6.1	Addisjons-, subtraksjons-, divisjons-, og multiplikasjonsregelen, sette prøve på svaret
6.2	Likninger med parenteser (distributive lov)
6.3	Likninger med variabel i nevner
6.4	Løse tekstoppgaver ved å lage lineære likninger
13.1	Løse ulikheter
13.2	Anvendelse av ulikheter i tekstoppgavene

Tabell 6: Oversikt over delkapitler i *DM1*.

Delkapittel	Tema
10.1	Addisjonsregelen
10.2	Subtraksjonsregelen
10.3	Flytte – bytteregelen
10.4	Multiplikasjonsregelen
10.5	Divisjonsregelen
10.6	Flere regler i samme likning
10.7	Likninger med parenteser
10.8	Er løsningen riktig?
10.9	Løse ulikheter

Tabell 7: Oversikt over delkapitler i *Grunntall*.

Delkapittel	Tema
5.1	Resonnering av løsning uten beregning
5.2	Fra tekst til likning, og fra likning til ord
5.3	Løse likninger ved beregning (de fire regnemetodene og parentesuttrykk) sette prøve på svaret
5.4	Uoppstilte likninger (tekstoppgaver)

Tabell 8: Oversikt over delkapitler i *Maximum*.

Delkapittel	Tema
6.5	Resonnering av løsning uten beregning
6.6	Å løse likninger ved hjelp av addisjon eller subtraksjon
6.7	Å løse likninger ved hjelp av multiplikasjon eller divisjon
6.8	Å sette prøve på likninger

Tabell 9: Oversikt over delkapitler i *Faktor*.

5.3 Vertikal analyse

5.3.1 Introduksjon til likninger

I dette delkapittelet ser jeg på hvordan bøkene introduserer likninger.

- *DM1A*

I den singaporske læreboka introduseres likninger ved at det blir sett på tidligere metoder for å løse samme type problem, uten at det ble brukt en bokstav for det ukjente tallet. Tidligere har de jobbet med tallmanipulering av typen:

$\bigcirc + 3 = 8$

I sirkelen skrev de inn et tall som gjorde at setningen ble sann. Denne metoden har blitt generalisert ved at det først forklares hvordan de gikk løs på slike oppgaver tidligere, og hvordan det skal bli gjort nå. Videre blir det forklart at for å løse likningen må man finne løsningen eller røttene til likningen. Lineære likninger blir definert ved $ax + b = c$, der a, b og c er konstanter og $a \neq 0$. *DM1A* illustrerer også en likevekt som kan relateres til en lineær likning for å løse problemer.

- *Grunntall*

Grunntall har på samme måte brukt en geometrisk figur og deretter erstattet dette med en x. Det er nevnt at noen elever kanskje har utført slike oppgaver tidligere, der de fyller inn ett tall i ruten.

$\square + 2 = 5$

Det er beskrevet at tallet i ruten må være 3 fordi $3 + 2 = 5$. Videre blir det forklart at en likning er to uttrykk som er like. Venstre side skal være lik høyre side av likhetstegnet.

- *Maximum*

Maximum har gitt en kort forklaring på hva en likning er. Med litt andre formuleringer sier *Maximum* omtrent tilsvarende som *Grunntall*. Boken går deretter rett på et eksempel med tilhørende løsningsforslag. Oppgaven er å finne ut av hva x er, uten å bruke regneregler for likninger.

- *Faktor*

Denne boken introduserer også likninger omtrent på samme måte som *Grunntall*. Det starter med at man skal fylle inn et tall som mangler i ruten slik at venstre side blir lik høyre side, slik det er vist ovenfor. *Faktor* gir også en tilsvarende forklaring på hva likninger er. Det blir gitt et eksempel på en likning og en tabell over ulike løsninger for x. Likninger er som følger:

$x \cdot 3 = 12$

x	$x \cdot 3$
1	$1 \cdot 3 = 3$
2	$2 \cdot 3 = 6$
3	$3 \cdot 3 = 9$
4	$4 \cdot 3 = 12$
5	$5 \cdot 3 = 15$
6	$6 \cdot 3 = 18$

Tabell 10: Hentet fra *Faktor* (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 193).

Løsningen som stemmer er markert gult. Videre gis oppgaver slik at elevene skal kunne bruke samme metode ved å resonnere seg frem til hva x må være for at uttrykkene skal være lik på begge sider av likhetstegnet.

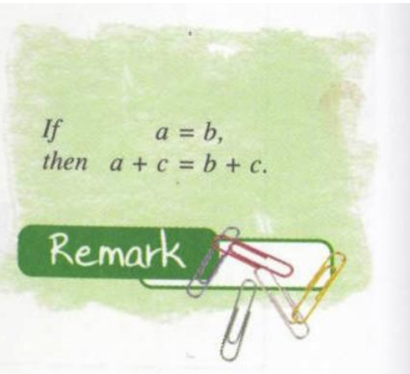
5.3.2 Introduksjon til ulikheter

DM1B bruker likninger til å forklarer hvordan ulikheter skiller seg ut fra noe de har lært tidligere. I motsetning til *Grunntall* blir ”$\leq$ " og " $\geq$ " brukt i kapittelet. Ulikheter introduseres ved hjelp av en tekstoppgave om en person som er på handletur for å kjøpe bøker. Forfatterne har vist hvordan man skriver oppgaveteksten matematisk og hvordan man kan regne den ut. Videre er det forklart hvordan løsningen til en likning skiller seg fra løsningen til en ulikhet. Likningen $3x = 10$ har kun en løsning $x = \frac{10}{3}$, mens ulikheten $3x < 10$ har flere løsninger $x < \frac{10}{3}$ og variabelen kan være en hvilken som helst reell verdi mindre enn $\frac{10}{3}$.

Det står i *Grunntall* at man skal bruke ulikhetstegnet for å vise hvilket tall som er størst og at det brukes mellom to uttrykk. Videre vises at likninger og ulikheter har fellestrekk ved å bruke regneregler fra likninger på ulikheter. Eksemplene er gitt ved å kun bruke tall uten variabler. Det er også vist at multiplikasjon og divisjon med negative tall snur ulikhetstegnet. Det er kun en ren matematisk kontekst der forfatteren ikke knytter matematikken til en hverdagslig kontekst.

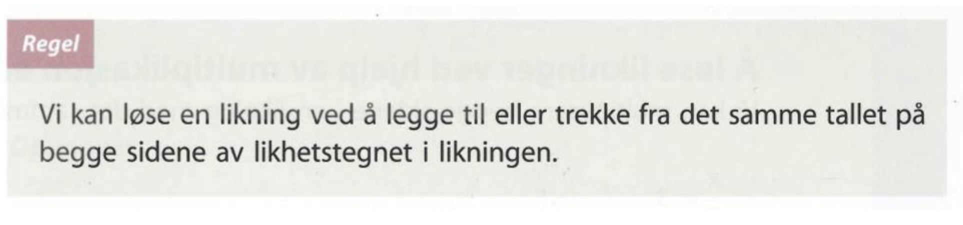
5.3.3 Lærebøkenes innhold og oppbygning

De utvalgte lærebøkene har et fellestrekk ved at hvert delkapittel består først og fremst av teori, deretter kommer det eksempler og til slutt påfølgende oppgaver. I tillegg har *DM1* oppgaver etter hvert eksempel. *DM1A* og *DM1B* har innimellom små ruter med nyttig informasjon. Rutene er som oftest bemerkninger eller huskeruter som oppgir generelle regneregler. Det er i tillegg ruter som gir utfordrende oppgaver, åpner opp for diskusjon, inneholder informasjon om kjente matematikere eller en nettlink som gir mer informasjon om det som presenteres i delkapittelet. Bemerkningsrutene eller huskerutene er plassert ved siden av eksemplene i boken slik at leseren får informasjon om hvilke type regel som benyttes i det gitte eksempelet. Nedenfor gis et eksempel på en slik bemerkning.



Figur 20: Hentet fra *DM1A* (Keung et al., 2010, s. 114).

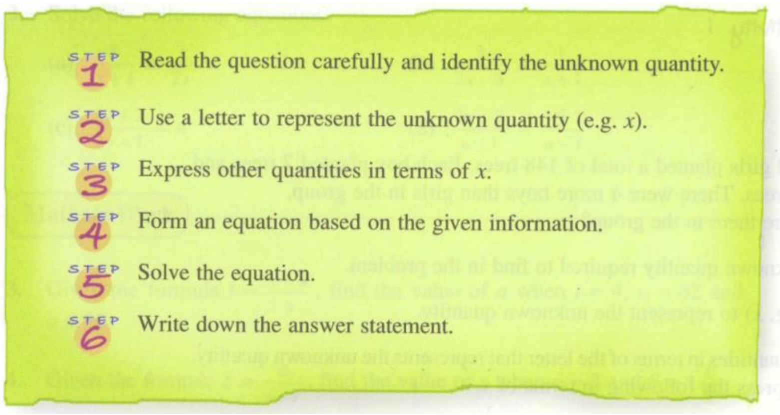
Regler blir gitt i form av tekst i de norske lærebøkene. I *Grunntall* finnes slike huskeruter i alle delkapitler med unntak av ett. *Maximum* har bare én huskerute og *Faktor* har to. Huskerutene er veldig like i de norske lærebøkene, derfor velger jeg å bare komme med ett eksempel, hentet fra *Faktor*:



Figur 21: Hentet fra *Faktor* (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 197).

DM1 har klasseaktiviteter i begge kapitlene. Klasseaktiviteten fra kapittel 6 består av en tekstoppgave. Dette er gitt i begynnelsen av kapittel 6.4 der man må lage lineære likninger for å løse et problem. I motsetning til påfølgende oppgaver i boka, er meningen at elevene skal ledes gjennom modelleringsprosessen for å løse en tekstoppgave ved hjelp av klasseaktiviteten. Dette skjer siden aktiviteten består av mange spørsmål som til sammen fører til at elevene må sette opp en lineær likning, løse likningen og deretter tolke svaret. Oppgaven er også skissert med "The Model Method" som kan være en alternativ metode eller en hjelpefigur for å løse oppgavene. Klasseaktiviteten i kapittel 13 kommer omtrent i starten av kapittelet og består av å beskrive en ulikhet med ord og få øvelse i å sette inn ulikhetstegnet mellom to uttrykk.

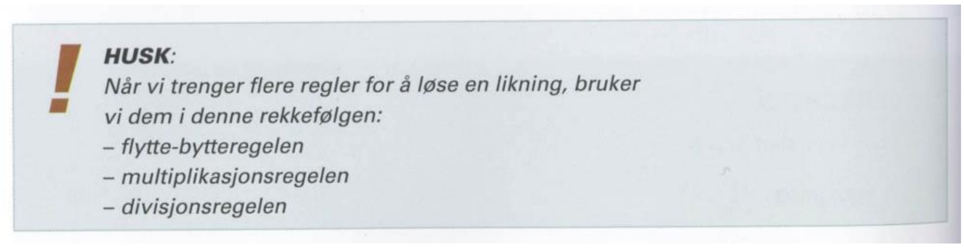
DM1 har gitt en oppskrift på hvordan man skal gå løs på tekstoppgaver. Figuren nedenfor viser nettopp dette.


STEP 1 Read the question carefully and identify the unknown quantity.
STEP 2 Use a letter to represent the unknown quantity (e.g. x).
STEP 3 Express other quantities in terms of x.
STEP 4 Form an equation based on the given information.
STEP 5 Solve the equation.
STEP 6 Write down the answer statement.

Figur 22: Problemløsningsstrategi (Keung et al., 2010, s. 124).

Oppskriften til problemløsning av lineære likninger er lagd på bakgrunn av klasseaktiviteten i kapittel 6.4. Klasseaktiviteten var en spesifikk oppgave bestående av flere deloppgaver som involverte disse stegene. Oppskriften består av seks steg og er en generell fremgangsmåte for alle tekstoppgaver. I *DM1B* brukes også oppskriften for problemløsning av ulikheter.

For å løse en likning med flere regler, har forfatterne av *Grunntall* lagd en oppskrift på hvilken rekkefølge regnereglene brukes. Først skal man bruke flytte-bytteregelen, deretter multiplikasjonsregelen og til slutt divisjonsregelen. Tidligere i kapittelet har forfatteren nevnt at flytte-bytteregelen erstatter addisjons- og subtraksjonsregelen.



HUSK:
Når vi trenger flere regler for å løse en likning, bruker vi dem i denne rekkefølgen:
– flytte-bytteregelen
– multiplikasjonsregelen
– divisjonsregelen

Figur 23: Hentet fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011).

5.3.4 Regneoppgaver

- *DM1*

Som nevnt tidligere har *DM1* gitt en oppgave etter hvert eksempel. Det er en oppgave der man som oftest kan bruke identisk algoritme som i eksempelet. I slutten av hvert delkapittel er det oppgaver som er delt inn i 3-4 kategorier. Vanskelighetsgraden starter fra lav til høy og er som følger:

- Basic practice: Enkle oppgaver som involverer direkte applikasjon av konseptet
- Further practice: Mer utfordrende oppgaver på direkte applikasjoner av konseptet
- Maths@Work: Presenterer oppgaver som anvender matematiske konsepter til hverdagslige situasjoner.
- Brainworks: Oppgaver som involverer tenkning på høyere nivå eller en ”open-ended” (eng.) tilnærming til problemer; problemer som kan løses på ulike måter og ikke har noen fast fremgangsmåte. Disse oppgavene stimulerer elevene til å tenke analytisk, være kreativ og til å selv kunne produsere løsninger.

I oppgaver i Brainworks eller Maths@Work kreves det ofte forståelse for andre konsepter enn det som presenteres i det aktuelle kapittelet, som for eksempel fellesnevner, noe de har lært tidligere. Oppgavene varierer i vanskelighetsgrad fra de fire nivåene, men innenfor ett nivå er det også ofte en del variasjon. Det starter med små likninger og utvikler seg ofte til større og ”styggere” likninger. *DM1* bruker derfor ikke tid på å gi mange oppgaver som kan løses ved hjelp av samme algoritme.

Eksemplene nedenfor er fra de to første nivåene, Basic Practice og Further Practice. I hvert nivå er det gitt to oppgaver der alle fire oppgavene er fra samme delkapittel. Det som skiller 1a) og 1j) i Basic Practice er i hovedsak at sistnevnte krever i tillegg multiplikasjonsregelen, addisjonsregelen og den distributive lov. Fra Further Practice er likningen fra oppgave 2h) mye større og mer tidskrevende i forhold til 2b). I tillegg har variablene fått en annen bokstav.

Basic Practice 1. Solve the following equations. a) 3x + 4 = 2x + 7   j) $\frac{2(1-4x)}{5}$ - 9 = 3(2 – x)
Further Practice 2. Solve the following equations. b) $\frac{x}{2}$ - $\frac{x}{3}$ = 7   h) $\frac{4z+3}{5}$ - $\frac{7z-1}{3}$ = $\frac{2-19z}{10}$

Figur 24: Eksempler hentet fra *DM1A* (Keung et al., 2010, s. 119).

Vi har sett hvordan oppgaver fra samme nivå varierer. I neste eksempel skal vi se på hvordan oppgaver fra ulike nivåer skiller seg. Figur 25 er fra første delkapittel i *DM1A* der de fire regnereglene er presentert. De to nivåene skiller seg i hovedsak ved at Further Practice krever bruk av fellesnevner.

Basic Practice 1. Solve the following equations. h) – 9x = 21   n) 1 - $\frac{1}{7}$x = - 8
Further Practice 2. Solve the following equations. b) $\frac{5}{2}$ x - $\frac{3}{4}$ = $\frac{2}{9}$ f) $\frac{3x-11}{7}$ – 2 = 0

Figur 25: Eksempler hentet fra *DM1A* (Keung et al., 2010, s. 116)

- *Grunntall*

Oppgavene består stort sett i å løse oppstilte likninger eller ulikheter. Delkapittelets overskrift forteller ofte hvilken regel som skal benyttes, spesielt de fem første. Stort sett kan alle oppgaver løses på samme måte med samme regneregler under hvert delkapittel. Det er fargekoder foran hver oppgave som symboliserer oppgavens vanskelighetsgrad. Det er tre fargekoder og de er som følgende:

Blå: Oppgaver som gir innøving av de grunnleggende ferdighetene.
Rød: Oppgaver med middels vanskelighetsgrad.
Grønn: Oppgaver med høy vanskelighetsgrad.

Kapittel 10 omfatter mange oppgaver som kan løses med samme algoritme som brukt i eksemplene. Det er ikke nødvendigvis alle fargekoder i hvert delkapittel. Noen delkapitler har bare blå fargekode, mens andre har kun blå og rød. Det er svært få grønne oppgaver. Det finnes også et delkapittel som ikke har oppgaver med blå fargekode. Nedenfor er det gitt et par eksempler på oppgaver fra ulike fargekoder fra *Grunntall*. Oppgavene med ulik fargekode som sammenlignes er hentet fra samme delkapittel. Forskjellen på oppgavene i Figur 26 er at løsningen blir et negativt tall i oppgaven med rød fargekode. Man kan bruke samme fremgangsmåte og regneregler i begge oppgavene.

10.11 Løs likningene.

a) $x + 5 = 9$

10.16 Løs likningene.

a) $x + 4 = 2$

Figur 26: Eksempler hentet fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011, s. 293).

Figuren nedenfor er hentet fra de to høyeste vanskelighetsgradene fra sjette delkapittel der de fire regnereglene er introdusert, samt flytte-bytteregelen som er en snarveisregel. Det som skiller oppgavene fra de ulike fargekodene er i hovedsak at det røde nivået krever bruk av multiplikasjonsregelen, noe den grønne fargekoden ikke gjør.

	10.42 Løs likningene.	**10. 39 Løs likningene.**
	d) $4x - 3 = x + 12$	c) $\frac{5x}{4} + 2 = 17$
	10.44 Løs likningene.	**10.45 Løs likningene.**
	d) $3x - 9 = 8x + 6$	d) $x + 4 = 3x + 1$

Figur 27: Eksempler hentet fra *Grunntall* (Bakke & Bakke, 2011, s. 298).

- *Maximum*

Maximum gir oppgaver som skal løses ved hjelp av forskjellige metoder. Det er oppgaver der elevene må resonnere seg frem til hva det ukjente tallet må være uten å bruke regneregler. Videre kommer oppgavene der man skal lage likninger fra tekst og omvendt. Oppgaver hvor elevene skal bruke pinner og brikker eller tegning for å løse likninger. Videre skal de lære å bruke regneregler for å løse likningene. Til slutt er det tekstoppgaver som skal løses ved først å sette opp en likning, løse likningen og deretter tolke svaret. I tillegg gir *Maximum* oppgaver der man må bruke andre konsepter enn fra de i kapittelet.

Mange oppgaver er merket med en fargekode som symboliserer vanskelighetsgraden. Det er blå, oransje og grønn fargekode. Det fremkommer at blå er lav, oransje er middels og grønn er høy vanskelighetsgrad. Nedenfor er det gitt et eksempel på to oppgaver fra forskjellige fargekoder under samme delkapittel.

5.76 Løs likningene. Sjekk om løsningene stemmer.

a $x + 10 = 2$

e $n - 10 = \frac{1}{2}n$

Figur 28: Hentet fra *Maximum* (Tofteberg et al., 2013, s. 319).

Det er gitt som en regel i kapittelet at man må gjøre samme regneoperasjoner på begge sider av en likning. Likevel er det ikke vist hvordan man håndterer brøk i en likning, men det er gitt oppgaver om det. Videre er det for eksempel gitt oppgaver med andre konsepter som ikke er presentert der man må kunne anvende den distributive lov og fellesnevner.

- *Faktor*

Faktor har ikke kategoriserte oppgaver etter vanskelighetsgrad som de andre bøkene, men den har et fåtall oppgaver som er markert med en stjerne. Disse er utfordrende oppgaver. *Faktor* har i likhet med *Grunntall* overskrifter som forteller hvilke regneregler man skal bruke, i tillegg er det gitt eksempel for alle regnemetodene. Et eksempel på en vanlig oppgave og en utfordrende oppgave er som følger:

6.32 Løs likningene.

e) $x + 10 = 8$

6.34 Løs likningene.

d) $x + 3 + 3 = 13$

Figur 29: Hentet fra *Faktor* (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 196).

Dette er to oppgaver der det i begge tilfeller benyttes subtraksjonsregelen. Forskjellen er at i den utfordrende oppgaven må det gjøres et ekstra trinn ved å legge sammen 3 og 3. Det er bare oppgaver bestående av oppstilte likninger med unntak av én tekstoppgave.

5.3.5 Erfaringsverden

I *DM1A* blir likninger presentert visuelt i starten av kapittelet med bilder av en vekt med klosser på begge sider. Det er illustrert ved et gitt eksempel hvordan vekten står kontinuerlig i likevekt ved å legge til og trekke fra klosser fra begge sider. For hvert steg i regneoperasjonen vises det en tilsvarende illustrasjon om hvordan vekten endrer seg. Boka har derfor ikke bare en ren matematisk kontekst, men også noe elevene kan relatere til hverdagen, sin erfaringsverden. Klasseaktivitetene er et eksempel på oppgaver elevene kan relatere til hverdagen.

Grunntall har bare en ren matematisk kontekst. Likninger eller ulikheter har ikke blitt knyttet opp mot noe som kan være kjent for elevene fra erfaringsverden. *Maximum* og *Faktor* har på tilsvarende måte som *DM1A* gitt eksempler ved å illustrere en vekt. Disse to bøkene presenterer dette i henholdsvis 3. og 2. delkapittel ved løsning av likninger ved beregning. Dette skjer etter å ha gjennomgått hvordan man kan løse likninger med andre metoder enn ved å bruke regneregler for likninger. *Maximum* illustrerer vekten på omtrent samme måte som *DM1A* ved at stegene i regneprosessen blir vist både med matematisk språk og illustrasjon. *Faktor* har illustrert vekten i et eksempel med tallregning, og ikke en algebraisk likning.

Når det gjelder ulikheter, finnes det som vist ovenfor bare i *Grunntall* og *DM1B*. Her er det bare *DM1B* som gir eksempler på noe som elevene kan koble til erfaringsverden. Kapittelet starter med å gi et problem som elevene kjenner til fra dagliglivet. Det omhandler antall varer man kan kjøpe for en gitt sum penger. Eksempelet fra virkeligheten blir deretter oversatt til det matematiske språket med symboler.

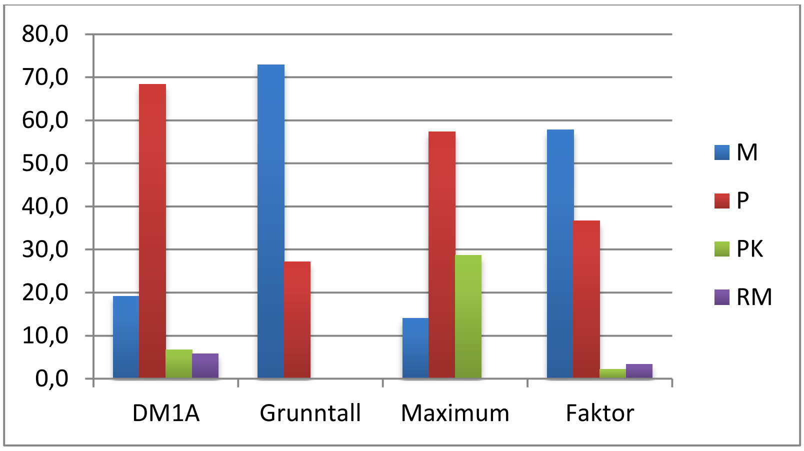
5.3.6 Fordeling av oppgaver etter kognitive nivåer

Nedenfor er det gitt en tabell over hvor mange oppgaver som er plassert under hver av de kognitive nivåene. ”Memorering” (M), ”Prosedyre uten kobling” (P), ”Prosedyre med kobling” (PK) og ”Regne matematikk” (RM) er de fire kategoriene. Som vist i kapittel 4.3.3 er det én oppgave fra *Grunntall* som ikke er med i tabellen fordi den ikke faller innenfor noen av kriteriene til de kognitive nivåene. Derfor har jeg valgt å utelate den oppgaven.

Lærebok	Nivåer			
	M	P	PK	RM
DM1A	23	82	8	7
Grunntall	148	55	0	0
Maximum	24	98	49	0
Faktor	52	33	2	3

Tabell 11: Likningsoppgaver innenfor kognitive nivåer.

Tabellen viser klart at det er ”Memorering” og ”Prosedyre uten kobling” som dominerer. Det er kun *DM1A* og *Faktor* som presenterer oppgaver fra alle de fire ulike kategoriene. Kolonnediagrammet nedenfor gir et visuelt bilde av tabellen i prosent.

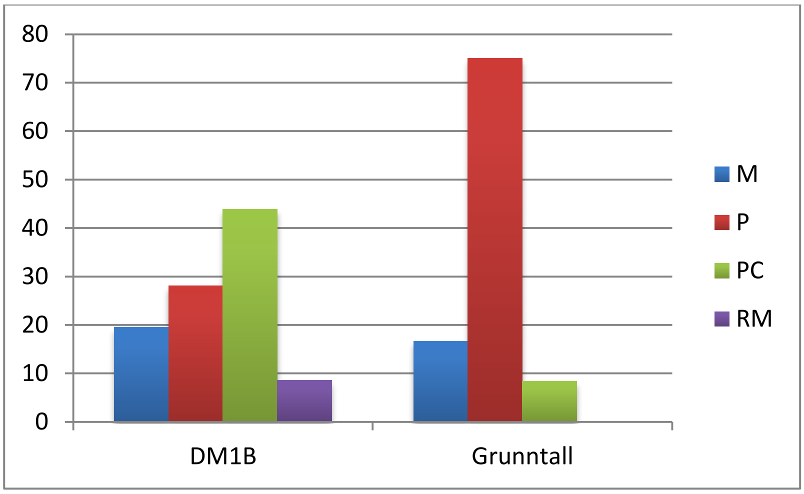


Figur 30: Likningsoppgaver innenfor kognitive nivåer i prosent.

Tilsvarende er det gitt en oversikt over hvor mange oppgaver i ulikheter som er plassert under hvert av de kognitive nivåene. Det er først gitt en tabell over fordelingen og påfølgende kolonnediagram som gir en oversikt i prosent. *DM1B* har oppgaver innenfor hvert av nivåene. *Grunntall* har derimot kun i de tre laveste nivåene.

Lærebok	Nivåer			
	M	P	PK	RM
DM1B	16	23	36	7
Grunntall	6	27	3	0

Tabell 12: Oppgaver i ulikheter innenfor kognitive nivåer.



Figur 31: Oppgaver i ulikheter innenfor kognitive nivåer i prosent.

6 Oppsummering og diskusjon

I dette kapittelet oppsummeres hovedtrekkene ved datainnsamlingen med påfølgende diskusjon. Deretter vil jeg også legge vekt på å sammenfatte tråder fra tidligere kapitler for å belyse forskningsspørsmålene og problemstillingen jeg stilte i begynnelsen av oppgaven.

Som nevnt i kapittel 2 undersøker jeg læreplanene og lærebøkene i Norge og Singapore som en del av den intenderte læreplanen i denne studien. Læreplandokumentene er vedtatt av myndighetene. Disse har blitt tolket av lærebokforfatterne og lærebøkene har blitt tolket av meg som forsker. Læreplanene og lærebøkene er brukt for å kunne relatere disse til den resulterte læreplanen, altså resultater fra TIMSS 2011. Det er verdt merke seg at formålet til TIMSS er å forsøke å finne faktorer som fremmer og hemmer læring i skolen slik at elevene får den kunnskapen de trenger videre. Høye skår i seg selv er ikke fokus. Rammeverket for TIMSS 2011 har også blitt nevnt i denne studien ettersom dette er rammene for TIMSS-oppgavene.

I teoridelen presenterte jeg hva som stod i kompetansemålene for Norge og Singapore i områdene likninger og ulikheter. Det undersøkte kompetansemålet for singaporske elever er mer detaljert beskrevet enn kompetansemålet for norske elever. Kompetansemålet for norske elever sier kun at elevene skal kunne løse likninger og ulikheter av første grad og ligningssystemer med to ukjente. Vi kan se på hvordan det norske kompetansemålet er upresist sammenlignet med det singaporske. Eksempelvis står det ikke noe om at elevene skal kunne løse likninger med brøk eller med variabel i nevner. I både den singaporske læreplanen og i TIMSS-rammeverket står det for eksempel, med litt ulike formuleringer, at elevene skal kunne gjenkjenne og formulere likninger for å løse problemer. Den norske læreplanen kan for så vidt være like dekkende som TIMSS-rammeverket, men beskrivelsen i kompetansemålet åpner for flere fortolkninger. Dette medfører mer frihet til å gjennomføre ulike typer undervisning og mer frihet for lærebokforfatterne. Det er tre faktorer som er verdt å oppsummere. I Norge er kompetansemålene delt inn i treårsbolker, mens den singaporske læreplanen har kompetansemål for hvert trinn. Kompetansemålet i den singaporske læreplanen er mer detaljert enn i den norske. I tillegg har Singapore i motsetning til Norge et godkjenningssystem for lærebøker. På grunn av disse tre faktorene er det også forventet å finne mer variasjon blant de norske lærebøkene når det kommer til hva som blir introdusert. Det er også mer frihet for lærere med tanke på *når* de vil undervise de ulike områdene. De kan eksempelvis samle alt av algebra og undervise dette på 10. trinn. Det er også andre faktorer som spiller inn, som for eksempel at lærerne bruker mindre tid på algebra, eller at de ikke har kommet seg gjennom lærebøkene før TIMSS-undersøkelsen. I tillegg er det som vi så i kapittel 4.2.1 et fåtall av lærere som ikke lener seg til det som står i læreboken når de legger opp undervisningen.

Det er verdt å merke seg at denne studien ser på læreplanen og en lærebok fra secondary one. Ettersom TIMSS foretas for secondary two i Singapore, har singaporske elever hatt mer algebra enn på det trinnet jeg undersøker. Jeg har valgt å undersøke en lærebok fra secondary one på grunn av mindre aldersforskjell, og siden kompetansemålet for Norge og Singapore ligner mest for henholdsvis 8. trinn og secondary one. Dessuten introduseres likninger og ulikheter for første gang på de sistnevnte trinnene.

6.1 Oppsummering og tolkning av funn

Datainnsamlingen gjelder kun for den singaporske læreboken, *DM1* og de tre norske lærebøkene *Grunntall, Maximum* og *Faktor*. Det har ikke blitt samlet inn data fra *Tetra* fordi forfatterne av lærebokserien presenterer verken likninger eller ulikheter på dette trinnet. Likevel er boken tatt med i studien fordi mangel på presentasjon av likninger og ulikheter på 8. trinn også er et funn. Det er verdt å merke seg at *Maximum* ikke ble brukt av elever som deltok i TIMSS-undersøkelsen i 2011. Boken er kun brukt for å gi et helhetlig bilde av et utvalg av lærebøker i dag.

6.1.1 Den horisontale analysen

Denne analysen indentifiserer hva de aktuelle delkapitlene innenfor likninger og ulikheter består av i de norske og singaporske lærebøkene.

Prosentandelene fra første tabell i kapittel 5.2.2 viser at de norske og den singaporske læreboken bruker omtrent like mye plass på å introdusere likninger. Oversikt over antall oppgaver i de aktuelle kapitlene forteller at 2/3 av de norske lærebøkene som introduserer likninger gir flere oppgaver relatert til likninger sammenlignet med den singaporske. I tillegg kan vi lese av tabell 5 at det kun er én av de fire norske lærebøkene som presenterer ulikheter. Flertallet av lærebøkene inneholder altså ikke noe om ulikheter på 8. trinn, men både *DM1B* og *Grunntall* gir en kort introduksjon. Dette kommer vi nærmere inn på i neste delkapittel.

De ulike temaene innenfor likninger blir presentert i samme rekkefølge i alle lærebøkene. Det blir presentert ulike måter å løse likninger uten regneregler, de fire regnereglene addisjons- ,subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsregelen, likninger med parenteser, og *til* slutt tekstoppgaver som krever modellering. Dette er mer eller mindre det som går igjen i lærebøkene i den rekkefølgen. Grunnidéene blir først presentert før det gradvis blir lært ulike løsningsteknikker eller regneregler. For ulikheter er det en kortere versjon. Der presenteres grunnleggende regler for ulikheter og deretter tekstoppgaver med modellering. Sistnevnte gjelder kun for den singaporske læreboken.

Tabell 6-9 gir en oversikt over hvilke temaer lærebøkene dekker i hvert delkapittel. Slik kan vi se hva som skiller innholdet i lærebøkene. *DM1* og *Maximum* introduserer problemløsningsoppgaver med modellering i form av tekstoppgaver. Det er altså kun én av de fire norske lærebøkene som introduserer elevene for modelleringsprosessen. *Maximum* har i tillegg et delkapittel som heter "Fra tekst til likning, og fra likning til ord" (Tofteberg et al., 2013, s. 313). Dette delkapittelet kan blant annet gi en forberedelse til siste delkapittel som består av å løse tekstoppgaver ved hjelp av modelleringsprosessen. Den singaporske læreboken "*My pals are here*" fra primary six som tilsvarer 6. trinn, gir lignende oppgaver som *Maximum.* Dette er oppgaver som består av å gjøre om tekst til et algebraisk uttrykk og omvendt. Når elevene møter på tekstoppgaver må de først oversette teksten til det matematiske språket. Etter beregninger må svaret tolkes. Når det gjelder tekstoppgaver med ulikheter er det bare den singaporske læreboken som gir dette.

Grunntall har i motsetning til de andre lærebøkene brukt over halvparten av kapittelet bestående av likninger til å gå igjennom addisjons-, subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsregelen samt flytte-bytteregelen. Dette svarer til fem delkapitler. *Faktor* har færre delkapitler, men har likevel brukt halvparten av kapittelet på de fire første regnereglene som nevnt ovenfor. Dette gir indikasjon på at lærebøkene fokuserer i større grad på de grunnleggende regnereglene som er nevnt ovenfor. Man kan forvente at det er temaer i den singaporske læreboken og i *Maximum* som ikke er presentert i *Grunntall* og *Faktor* ettersom den singaporske læreboken og *Maximum* har kun brukt ¼ av kapittelet på å introdusere de fire første regnereglene som nevnt ovenfor. Videre er *Faktor* den eneste læreboken som ikke introduserer likninger med parenteser.

6.1.2 Den vertikale analysen

Denne analysen identifiserer karakteristiske trekk ved innholdet i de utvalgte kapitlene i de norske og singaporske lærebøkene.

Introduksjon og oppbygning av områdene likninger og ulikheter

De norske lærebøkene har en nesten lik tilnærming når det kommer til introduksjonen av likninger. I hovedsak er det beskrevet at likninger består av to uttrykk der venstre side er lik høyre side av likhetstegnet. Med unntak av *Maximum* blir det i alle bøkene vist hvordan x opptrer i en likning ved å generalisere tallregningen til algebra. Det blir vist hvordan en rute i en likning som mangler et tall kan erstattes med en variabel og hvordan løsningen til x passer inn i likningen ved å få like verdier på begge sider av likhetstegnet. *DM1* gjør noe av det samme, men presenterer derimot en generell formel for en lineær likning, i tillegg til at en likning sammenlignes med en vekt som er i balanse i starten av kapittelet.

Den singaporske læreboken og *Grunntall* gir helt ulike presentasjoner av ulikheter. Den singaporske læreboken gir en introduksjon til ulikheter fra en erfaringsmessig kontekst som man kan møte på i hverdagen. Slik får elevene et inntrykk av hvilke type problemer som kan løses ved hjelp av ulikheter og hvilken betydning ulikheter har. Her kommer det frem at i motsetning til en likning får vi mer enn ett svar. I tillegg blir også ”≤” og ” ≥” brukt. *Grunntall* har kun en matematisk kontekst og legger mest vekt på å presentere regneregler for ulikheter. I motsetning til den singaporske læreboken blir multiplikasjon og divisjon med negative tall presentert i *Grunntall.* Dette blir presentert i secondary two i Singapore.

I kapittel 5 er det gitt et eksempel på en regneregel fra både den singaporske og en norske lærebok. Regler i de norske lærebøkene er formidlet i form av tekst. Den singaporske læreboken presenterer algebraiske regler ved hjelp av det matematiske symbolspråket. Informasjonen gitt til eleven blir den samme, men det virker som om de norske lærebøkene har en mildere overgang til algebra ved ikke å gi generelle regler ved hjelp av symbolspråket.

Som beskrevet i kapittel 5 skiller klasseaktivitetene seg fra de andre oppgavene i *DM1*. Klasseaktiviteten i likningskapittelet fra læreboken er ment som en introduksjon til påfølgende tekstoppgaver som krever en modelleringsprosess. Eleven blir ledet gjennom prosessen og får deretter en generell oppskrift på hvordan man løser tekstoppgavene ved å benytte seg av samme prosess. Klasseaktiviteten fra kapittelet om ulikheter i læreboken går mer på å gi forståelse for hva ulikhetstegnet betyr og hvordan man bruker det.

Grunntall oppgir alle regler som kreves for å kunne løse oppgavene i det undersøkte kapittelet. Stort sett kan algoritmene som er brukt i eksemplene brukes for å løse oppgavene. *Grunntall* er det eneste læreverket som introduserer flytte-bytteregelen som et alternativ til addisjons- og subtraksjonsregelen. I tillegg gir boka en oppskrift for hvilken rekkefølge man skal bruke regneregler. Ser vi tilbake på kapittel 5, er dette Figur 23. Forfatterne av *Grunntall* mener at elevene skal bruke en slik oppskrift på å løse likninger. Oppskriften fungere for oppgavene som er gitt i det delkapittelet den er introdusert. I neste delkapittel kan ikke oppskriften benyttes når likninger med parenteser introduseres. Oppskriften kan være fornuftig dersom man ser på heltallskoeffisienter, men hva skjer når man kommer til brøk? Dersom forfatterne vil at elevene skal stadig støtte seg til fiktive regler og oppskrifter på hvordan man løser problemer, må det hele tiden lages nye oppskrifter på høyere matematikknivå når likningene blir mer kompliserte. Man kan stille spørsmål til hvorvidt det er ønskelig at elevene skal støtte seg til slike regler og oppskrifter som de kunne ha klart seg uten.

Oppgaver

Et tydelig funn er at selv om fargekodene symboliserer vanskelighetsgraden, er det i *Grunntall* og *Faktor* veldig små forskjeller mellom oppgavene fra de ulike nivåene. I *Maximum* og den singaporske læreboken kan vi derimot se klare forskjeller mellom de ulike vanskelighetsgradene. I noen av de norske lærebøkene finnes det til og med oppgaver som kan løses med identiske algoritmer i to forskjellige nivåer av vanskelighetsgrad. Oppgaven fra Figur 26 viser nettopp dette. Av de to oppgavene i *Grunntall* skiller den vanskeligste oppgaven seg ut kun ved å gi en negativ løsning som svar. Oppgavene fra Figur 25 hentet fra *DM1A* og Figur 27 hentet fra *Grunntall* kan sammenlignes med tanke på at de er hentet fra et delkapittel der addisjons-, subtraksjons-, multiplikasjons- og divisjonsregelen har blitt introdusert. Forskjellen er at oppgavene fra *DM1A* er fra de to letteste vanskelighetsgradene, mens de fra *Grunntall* er fra de to vanskeligste. I tillegg er oppgavene fra *DM1A* hentet fra første delkapittel og oppgavene fra *Grunntall* fra sjette delkapittel. Ved første øyekast ser vi at *DM1A* trekker inn andre konsepter som fellesnevner i nivået ”Further Practice”. I tillegg blir oppgavene ”styggere” og kanskje mer tidskrevende. Oppgavene fra *Grunntall* er omtrent like med unntak av at noen av oppgavene fra middels vanskelighetsgrad krever bruk av multiplikasjonsregelen, noe den vanskeligste ikke gjør. I motsetning til *Grunntall* kan det observeres mer variasjon i bruk av konsepter på et høyere nivå i oppgavene til *DM1A*. Eksempelet fra *Maximum* i Figur 28 viser at oppgavene fra ulik vanskelighetsgrad varierer i større grad enn oppgaver i *Grunntall*. Figur 24 er et annet eksempel fra den singaporske læreboken. Der kan man se at oppgaver ikke bare blir utfordrende fra et nivå til et annet, men også innenfor et nivå.

Faktor har mange likheter med *Grunntall*. Overskrifter i *Grunntall* og *Faktor* gir informasjon til leseren om hvilke regneregler man må bruke for å kunne løse oppgavene. Leseren trenger dermed ikke selv å finne ut av hvilken metode oppgaven kan løses med. *Maximum gir* oppgaver som skal løses på flere måter, enten ved beregning, tegning, bruk av pinner og brikker og gjøre om fra tekst til setning og omvendt.

Erfaringsverden

I hovedsak har den singaporske læreboken en mer hverdagslig kontekst enn de andre lærebøkene. *DM1* er den eneste boken som starter kapittelet med å presentere både likninger og ulikheter med noe elevene kjenner til fra dagliglivet, i tillegg til hverdagsnære oppgaver i kapittelet. *Maximum* og *Faktor* viser en liten illustrasjon av noe fra erfaringsverden. *Grunntall* har derimot kun en ren matematisk kontekst. Der blir det ikke på noen måte gitt informasjon om hvorfor elevene må lære de ulike områdene likninger eller ulikheter eller i hvilke hverdagslige situasjoner de kan få bruk for dem.

De ulike kognitive nivåene

Siste del av den vertikale analysen består av fordelingen av oppgaver etter kognitive nivåer. Funnene viser at de fleste oppgavene i alle lærebøkene kun krever bruk av kognitive ferdigheter på lavt nivå når det kommer til oppgaver med likninger. De fleste oppgavene i *Grunntall* og *Faktor* fordrer ”Memorering” mens *DM1A* og *Maximum* fordrer for det meste ”Prosedyre uten kobling”. Når det gjelder ulikheter fordrer de fleste oppgavene i *Grunntall* ”Prosedyre uten kobling”, mens *DM1B* har mer spredning i fordelingen. De fleste oppgavene fordrer ”Prosedyre med kobling”.

6.1.3 Det helhetlig bildet

Den horisontale og den vertikale analysen har blitt brukt i denne studien for å gjøre et forsøk på å undersøke karakteristiske trekk ved lærebøkene. Dette er gjort for å gi en forståelse for hvordan lærebøkene skiller seg fra hverandre. I denne delen av oppgaven vil jeg si noe om det helhetlige bildet og belyse forskningsspørsmålene.

Jeg har tidligere nevnt i denne oppgaven at de singaporske elevene undervises i likninger og ulikheter ett skoleår før de norske elevene. Når det gjelder algebra generelt blir, ifølge læreplanen, elevene i Singapore introdusert for algebra to år før norske elever, altså på 6. trinn. De har dermed hatt ett år algebra før de lærer å løse likninger og ulikheter. Som jeg nevnte i kapittel 1 er algebra et abstrakt emneområde som krever abstrakt tenkning og høy intellektuell forståelse. Denne forståelsen er gjerne noe som kommer etter å ha jobbet med et område over en lengre periode og krever som oftest modning dersom eleven skal kunne oppnå den ønskede forståelsen. Singaporske elever har et forsprang i emneområdet i forhold til TIMSS 2011 og får derfor en lenger modningsprosess enn de norske elevene. I tillegg til dette lærer elevene i Singapore å løse aritmetiske og algebraiske tekstoppgaver via ”The Model Method” i ung alder. I eksempelet i kapittel 3.5.4 kan vi se at elevene bruker dette verktøyet til å lage en modell av oppgaven og de må derfor ha forståelse for modelleringskonseptet for å kunne løse problemet. Elevene må altså finne en problemløsningsmetode som passer og deretter kunne anvende den. I stedet for å ha bare algoritmiske ferdigheter må eleven kunne identifisere en passende modell og deretter finne fram til beregninger som kan løse denne oppgaven. Løsningen må til slutt tolkes ved å gå tilbake til det opprinnelige problemet. På grunn av ”The Model Method” vil elever i Singapore ha kjennskap til modelleringskonseptet før de introduseres for algebra. Løsning av tekstoppgaver er et av de mest problematisk områdene i læreplanen (Ng & Lee, 2009b, s. 282). Det er muligens derfor singaporske elever starter tidlig med dette området. Et annet moment som vi så i kapittel 3 som skiller seg fra norske elever er at svake elever i Singapore må ha flere timer i matematikk i uken. I Norge er det kun en åpning for dette i 25 %-regelen. Dette tyder på at Singapore strukturerer organisatorisk differensiering mer for elevene og at vanskelige områder i matematikken kommer tidlig i skolen slik at elevene får en lengre modningsprosess for å oppnå den ønskede forståelsen.

Siden det kun er én av de fire norske læreverkene som introduserer ulikheter, går sannsynligvis mange norske elever ut av 8. trinn uten å vite hva ulikheter er. Det kan være ulike årsaker til dette, blant annet organiseringen av læreplanens treårsbolk. Forlagene og lærebokforfattere kan eksempelvis velge å introdusere dette på et senere tidspunkt. Det er naturlig å anta at mange elever ikke er i stand til å kunne besvare noen av oppgavene i TIMSS som består av ulikheter på grunn av manglende kunnskaper. Likninger og ulikheter har mange fellestrekk, men dersom man ikke vet hva ulikheter er eller hva ulikhetstegnet betyr, er det naturlig at de fleste elevene ikke vil kunne resonnere seg frem til riktig løsning i TIMSS-oppgavene.

Noen temaer som blir presentert i den singaporske læreboken blir ikke presentert i de norske lærebøkene. Eksempler på dette er: Likning med variabel i nevner, tekstoppgaver med modellering i likninger (med unntak av *Maximum*), ulikheter (med unntak av *Grunntall*) og tekstoppgaver med modellering i ulikheter. Det er ingen temaer i de norske lærebøkene som ikke finnes i boken for Singapore. Det finnes derimot noen elementer i norske lærebøker som ikke finnes i den singaporske læreboken. Hovedsakelig: Flytte-bytteregelen som er en snarvei for addisjons- og subtraksjonsregelen, resonnering av oppgaver uten beregning, løsning ved hjelp av pinner og brikker og så videre. Multiplikasjon og divisjon med negative tall i ulikheter er også et eksempel. Dette blir presentert i secondary two i Singapore. Dette er elementer som ikke er beskrevet i rammeverket til TIMSS. Singaporske elever ser likevel ikke ut til å ha ulemper med dette når de besvarer de utvalgte TIMSS-oppgavene fra 2011. Dette blir sett nærmere på i neste delkapittel. Tidligere forskning har vist at lærebøker fra Øst-Asia presenterer konsepter og emner tidligere enn amerikanske lærebøker. I tillegg er det vist at enkelte konsepter eller emner ikke presenteres i de amerikanske lærebøkene på de undersøkte trinnene (Hong & Choi, 2014; Stevenson, 1985). Singapore er et øst asiatisk land og Norge er et vestlig land, så geografisk sett viser denne studien nøyaktig det samme.

En av de mest påfallende observasjonene er at læreboken fra Singapore fokuserer mer på å presentere likninger og ulikheter i en hverdagslig kontekst både i form av oppgaver, tekst og eksempler. Dette er som nevnt tidligere noe som det er lite av i de norske lærebøkene. Det er kun *Maximum* som fokuserer på dette når det kommer til oppgaver, men denne boken ble produsert i 2013 og var derfor ikke tilgjengelig før TIMSS 2011. Betydningen av likninger og ulikheter kommer ikke særlig godt frem og det kan forårsake at elevene kun regner uten å vite hvorfor de gjør det. Fra kapittel 3.2.5 følger det fra Lithner (2003) at dette kan resultere i at elevene knytter seg mer til å identifisere lignende situasjoner de kan herme etter når de ikke har forståelse for selve konseptet. Løsningen i oppgaven kan i tillegg være et tall som de ikke har noe å knytte opp mot. Det kan derfor være vanskelig å vurdere om svaret virker noenlunde riktig eller om det er et urealistisk svar. De fleste oppgavene krever dessuten ikke at man må tolke svaret ved å gi en forklaring. Den singaporske læreboken introduserer ulikheter ved å eksemplifisere med noe elevene kan ha kjennskap til, kjøp av varer og pengebruk. Slik kan de gjennom eksempelet få indirekte informasjon om i hvilke situasjoner de kan få bruk for ulikheter. Når de neste gang får slike oppgaver kan de koble det til noe som er kjent, i henhold til kognitiv læringsteori (Solerød, 2009).

Likninger og ulikheter blir for første gang introdusert på det trinnet denne studien undersøker i begge landene, altså i 8. trinn i Norge og i secondary one i Singapore. I gjennomsnitt er progresjonen i de norske bøkene lavere enn den fra Singapore. De bruker i varierende grad mer plass på å gi omtrent like oppgaver med ulike verdier, samt praktiske måter å løse en oppstilt likning på uten å bruke regneregler. Elevene får i mindre grad muligheten til å strekke seg og oppnå samme fremgang som singaporske elever fordi det blir fokus på øving ved repetisjon. Dette kan spesielt bli kjedelig for de flinke elevene når utfordringene er på et lavere nivå sammenlignet med læreboken fra Singapore. En mulig faktor kan være at de singaporske elevene helt fra primary six har vært kjent med algebra og lignende former for abstrakt matematikk. I tillegg kan ”The Model Method” gi en mildere overgang til problemløsning i algebra. Tross nivåforskjeller er det i gjennomsnitt mye mindre variasjon mellom oppgaver fra ulike fargekoder i de norske bøkene sammenlignet med boken fra Singapore. De vanskeligste oppgavene skiller seg mindre ut og det kreves lite bruk av andre konsepter som for eksempel fellesnevner. Dette treffer kanskje de svakeste sin proksimale utviklingssone, men kan forhindre progresjonen til sterkere elever (Solerød, 2009).

Et av poengene er altså at norske elever har færre muligheter til å prestere like bra som singaporske elever på grunnlag av de undersøkte lærebøkene, og ikke bare det at singaporske elever lærer algebra før norske elever. Innholdet i lærebøkene gir en indikasjon på at det aktuelle lærestoffet i de norske lærebøkene blir plassert i et strukturert mønster der de grunnleggende prinsippene for å løse likninger, eventuelt ulikheter, er gitt slik at de kan løse mengder av oppgaver på lavt nivå. For å gi en grov beskrivelse av de norske lærebøkene, består de stort sett av oppgaver på et lavere nivå og flere repetisjoner av lignende oppgaver. Den singaporske gir derimot oppgaver på et høyere nivå og mer variasjon av temaer og oppgavetyper.

Ifølge Stein et al. (1996) vil elevers fulle forståelse for matematikk begrenses når de ikke får muligheten til å tolke problemet og bestemme seg for hvordan de skal gå frem. Når lærebøkene stort sett gir oppgaver som kan løses ved å kopiere, kan elevene velge en snarveisstrategi og trenger dermed ikke forståelse for å kunne løse oppgaven. Oppgavene i boken styrer mye av hvordan elevene må resonnere seg frem til løsningen. De kan dermed omslutte seg med et begrenset system der fakta, konsepter og prosedyrer fanges opp. Elevene begrenses til visse aspekter i matematisk oppnåelse ved kun å bli testet i grunnleggende ferdigheter og ved å løse rutineoppgaver. Som nevnt i kapittel 3, når eleven ikke blir utfordret til å måtte uttrykke egne generaliseringer vil ikke matematisk tenkning finne sted. Når elevene senere møter på oppgaver av type ikke-rutineoppgaver eller oppgaver som ikke kan løses ved å identifisere likheter med tidligere oppgaver eller fremgangsmåter vil de støte på problemer. Av den grunn kan singaporske elever være mer vant til å møte på utfordrende oppgaver der de må uttrykke sine egne generaliseringer. Det er slike oppgaver som er givende og meningsfulle og gir problematiske situasjoner for elevene (Stein et al., 1996).

Annen forskning har vist at flertallet av oppgavene i bøker fra Øst-Asia fordrer kognitive ferdigheter på høyere nivå sammenlignet med lærebøker fra vesten (Charalambous et al., 2010; Hong & Choi, 2014). Ser vi på oversikten over kategoriserte oppgaver i likninger fra Figur 30, viser derimot denne studien at flertallet av oppgavene i både den singaporske og de norske lærebøkene fordrer kognitive ferdigheter på lavt nivå. Hong og Chois (2014, s. 259) artikkel viser nøyaktig det samme for annengradslikninger for koreanske og amerikanske lærebøker. Figur 31 viser at litt over flertallet av oppgavene i ulikheter fordrer et høyt kognitivt nivå. I *Grunntall* fordrer derimot flertallet av oppgavene et lavt kognitivt nivå.

Dersom vi sammenligner *DM1* med *Maximum* som har flere oppgaver innenfor nivået ”Prosedyre med kobling”, vil vi se at noe av det kan forklares ved hjelp av eksempler i *Maximum*. Som jeg har nevnt tidligere i kapittel 4.3.2, er dette fordi kriteriene for kodingsmanualen baserer seg på eksempler. *Maximum* har eksempelvis gitt oppgaver som krever bruk av addisjonsregelen før det er gitt et eksempel på hvordan man bruker den. Videre er det ikke gitt eksempler som krever multiplikasjonsregelen i likningskapittelet. Dette er en av hovedårsakene til at *Maximum* har fått mange oppgaver innenfor ”Prosedyre med kobling”. Vi ser også dette i noen få oppgaver i *Faktor*. Den singaporske læreboken har derimot gitt mange flere eksempler tilsammen. Dette gjelder også eksempler av tekstoppgaver. Kategoriseringen av oppgavene inn i det ovennevnte nivået skyldes bruk av konsepter som ikke befinner seg i det aktuelle kapittelet. Slik som kriteriene for nivåene i kodingsmanualen har blitt definert, har det derfor blitt færre oppgaver innenfor ”Prosedyre med kobling” i *DM1* i forhold til *Maximum*. Vi ser at det er ulike årsaker i forhold til hvilke oppgaver som er kategorisert som ”Prosedyre med kobling” i den singaporske og de norske lærebøkene. Dette er en svakhet ved kodingsmanualen. Det er verdt å merke seg at de fire nivåene ikke har tatt hensyn til oppgaver som består av ”stygge” og lange uttrykk som kanskje er mer tidskrevende eller generelt krevende. Nok en svakhet med kodingsmanualen som fører til at enkelte interessante funn ikke blir belyst. Videre fordrer de fleste oppgavene i *Faktor* og *Grunntall* et lavt kognitivt nivå mest på grunn av ensformede oppgaver som ligner. Oppgavene som omhandler likninger skiller seg mest ut i *Grunntall* fordi man kan bruke nøyaktig samme fremgangsmåte, altså samme algoritme som eksemplene på omtrent 70 % av regneoppgavene.

Som nevnt tidligere er Figur 22 en oppskrift på hvordan man løser ikke-rutineoppgaver som krever modelleringsaspektet. Oppskriften har noen likheter med Pólyas firetrinns-oppskrift for hvordan man går frem i en problemløsningssituasjon som nevnt i kapittel 3 (2008). Dette er noe de norske lærebøkene, altså de tre analyserte og *Tetra*, kan dra nytte av å presentere siden de ikke presenterer liknende verktøy som ”The Model Method”. Oppskriften har ikke direkte påvirket resultatene for kategorisering av oppgaver, men den er brukt som et hjelpemiddel både i eksemplene og ment for at elevene skal bruke når de løser oppgaver.

6.1.4 TIMSS-oppgaver

I denne delen av oppgaven skal jeg undersøke i hvilken grad fremstillingen av likninger og ulikheter i de norske lærebøkene bidrar til å kunne besvare de utvalgte oppgavene fra TIMSS 2011 gitt i kapittel 3.

Oppgave 1 og 7 har noe i felles med tanke på at det er tekstoppgaver. Derfor vil jeg se på disse to oppgavene sammen. I oppgave 1 skal man finne den lengste delen av et trestykke som deles i tre deler. I oppgave 7 skal man sette opp et likningssett i forhold til varer og pengebruk. I oppgave 1 er det ikke gitt at problemet må løses ved å sette opp en likning. I oppgave 7 kan man ut fra svaralternativene se at løsningen gir et likningssett og oppgaven kun krever at elevene skal sette opp likningene. Den er derfor ikke fullt så vanskelig som oppgave 1 og er kanskje mindre tidskrevende. I tillegg er oppgave 7 en flervalgsoppgave og gir dermed rom for gjetning. Det er 0,4 % som har svart riktig på oppgave 1 og 30,9 % på oppgave 7. Resultatene viser at det er mange flere elever som har klart den sistnevnte oppgaven. For å kunne oversette et problem fra dagliglivet til et matematisk problem må man kunne modellere og sette opp en eller flere likninger. Blant de norske lærebøkene er modellering innenfor likninger kun presentert i *Maximum*. Denne boken var ikke tilgjengelig før undersøkelsen i 2011. Sannsynligvis vil dette si at mange elever ikke har modelleringsferdigheter, spesielt før TIMSS 2011. Mangel på introduksjon av oppgaver som krever modellering kan derfor muligens forklare noe av de svake resultatene siden lærebøkene brukes mye i undervisningen. Etter å ha satt opp en likning i oppgave 1 må man bruke regneregler for likninger for å finne den ukjente størrelsen. Til slutt må den ukjente størrelsen settes inn i de ulike lengdene og deretter vurdere hvilken lengde av de tre trestykkene som er lengst. Det finnes også alternative metoder for å løse oppgaven. I masteroppgaven til Rune Resell-Hansen (2014), som er skrevet parallelt med min oppgave, vises det at kun én av 277 undersøkte besvarelser av oppgave 1 er løst med den ovennevnte metoden. La oss tenke på en elev som ikke kan lage en modell av oppgaven. Siden første steg i oppgaven består av å lage en algebraisk modell, vil ikke det han eller hun har av kunnskap for å løse en oppsatt likning komme frem i løsningen. Resultatene indikerer at norske elever har store problemer med å løse slike oppgaver. Det er naturlig å anta at de bedre resultatene i oppgave 7 kan skyldes gjetning eller at alternativene har blitt sammenlignet med tekstoppgaven ettersom observasjoner i lærebøkene i denne studien indikerer at slike temaer ikke har blitt satt i fokus. Siden oppgave 1 består av flere trinn enn oppgave 7 kan man tenke seg at flere elever har klart en del av oppgaven. Av de 277 besvarelsene som Resell-Hansen har undersøkt er det i tillegg til den ene riktige besvarelsen enda en elev som har klart å sette opp likningen, men ikke klart å løse den (Resell-Hansen, 2014). Dette støtter antagelsen knyttet til funnene mine om mangel på modelleringsaspektet i lærebøkene som en grunn til at norske elever ikke har slike kunnskaper.

Oppgave 2 består av en ulikhet med to ledd på hver side av ulikhetstegnet. Dette er også en av de oppgavene som norske elever har skåret veldig lavt på. Ifølge Grønmo et al. (2012, s. 46) er denne oppgaven kanskje best egnet for de flinke elevene fordi oppgaven stiller nokså store krav til formell matematisk kompetanse. Oppgaven består av å løse en ulikhet og denne kan løses med de samme regnereglene som brukes for å løse likninger. Av de fire norske lærebøkene er det kun *Grunntall* som presenterer ulikheter. Det er derfor ikke overraskende at de fleste elevene ikke har klart å løse oppgaven. Siden det er veldig få som har svart riktig, 1,3 %, ser det ut til at det er svært få elever på 8. trinn som ble introdusert for ulikheter før undersøkelsen i 2011. Det kan også tenkes at elevene som har løst ulikheten har løst den som en likning og fått riktig svar. Det har blitt gjort en del forskning på elevenes mulighet til å lære. Begrepet OTL – *Opportunity to Learn* brukes innen utdanningsforskning (Grønmo, Borge & Rosén, 2013, s. 74). ”Elevenes læringsmuligheter har sammenheng med hva de har fått undervisning i” (Grønmo, Borge & Rosén, 2013, s. 74). Som vi har sett i denne oppgaven styrer lærebøkene mye av undervisningen i norske skoler. Derfor kan lærebøkene til en viss grad si noe om nivået til OTL-faktoren.

I oppgave 3 er det 30,5 % av de norske elevene som har svart riktig. Oppgaven består av to likninger med to ukjente. Slike oppgaver er ikke presentert i noen av lærebøkene i denne studien. Singaporske elever lærer metoder for å løse likningssett i secondary two og dette kan forklare det høye resultatet (Ministry of Education, 2007b). Det finnes alternative måter å løse denne oppgaven på. Gitt svaralternativene kan verdiene for de to variablene settes inn i likningene for å undersøke hvilke verdier som oppfyller likhetstegnet. Det kan antas at noen av de elevene som har fått riktig svar har gjort dette, eller eventuelt gjettet ett av alternativene. Bøkene presenterer den informasjonen som trengs for å løse oppgaven, men ikke ligninger med to ukjente. Det elevene må vite på forhånd er at venstre side av likhetstegnet *må* være lik høyre side. Likevel kan det være mange som ikke har fått til denne oppgaven fordi de ikke har sett det før og ikke er vant til å møte på helt andre oppgavetyper.

Oppgave 4 er en enkel lineære likning som løses ved å bruke divisjonsregelen. Alle lærebøkene introduserer dette, med unntak av *Tetra*. Dette er en typisk rutineoppgave og kan løses med samme fremgangsmåte som blir presentert i eksemplene i læreverkene. Likevel er det kun 39,2 % som har klart å svare riktig på denne oppgaven, mens andelen er 85,2 % av de singaporske elevene. Som vi så i kapittel 3, av alle de utvalgte oppgavene er det denne oppgaven de norske elevene har skåret høyest på. Ut ifra observasjonene ser det ut som at problemet har ligget i andre del av oppgaven som kommer til syne ved å se på alternativene. Riktig svar krever omgjøring av en uekte brøk til et blandet tall. Dette konseptet er ikke presentert i algebrakapitlene og kommer muligens fra tidligere. Det kan som alle andre oppgaver være flere årsaker til det lavere resultatet. Det kan for eksempel være at mange norske elever ikke har lært konseptet med å gjøre om et uekte brøk til blandet tall. Det kan også være på grunn av at elevene har jobbet mindre med algebra i motsetning til singaporske elever.

I oppgave 5 er det gitt en likning med to ledd på hver side av likhetstegnet. Likningen skal ikke løses, men man skal velge hvilket alternativ som er et riktig trinn for å løse likningen.

Man samler sammen like ledd på hver side av likhetstegnet. Svaralternativene er veldig like, bortsett fra fortegnene. Slike likninger er presentert i alle lærebøkene med unntak av *Tetra*. Det er kun 21,7 % som har svart riktig. Forskjellen er at oppgaver i lærebøkene krever hele løsningen på problemet, men dette er kun et trinn i løsningen. Oppgaven krever kun bruk av addisjons- og subtraksjonsregelen, eventuelt flytte-bytteregelen. Igjen er dette noe norske elever kun har jobbet med samme skoleår de testes i TIMSS, mens singaporske elever har jobbet med likninger i to år. Singaporske elever har hatt en lengre modningsprosess og dette kan forklare noen av resultatforskjellene.

Oppgave 6 består av en likning med én brøk på hver side av likningen. En av dem inneholder en variabel som befinner seg i nevneren. Som vi har sett er ikke slike oppgaver gitt, presentert eller forklart i de norske lærebøkene. *DM1A* har derimot et helt delkapittel med slike likninger. Det er muligens svært få andre 8. trinns lærebøker i Norge som presenterer dette, når vi ser på resultatet som er 10,5 %. En mulig faktor er at mange har gjettet. Oppgaven stiller krav til kompetanse i multiplikasjons- og divisjonsregelen for å løse den algebraisk. Når mange av elevene ikke har sett slike likninger vet de muligens ikke at variabelen først må flyttes til telleren for å løse problemet.

De fleste oppgavene som er brukt i denne studien fra TIMSS er flervalgsoppgaver. I utgangspunktet har man ikke mulighet til å finne ut om en elev har gjettet eller regnet ut en løsning siden fremgangsmåten ikke kommer frem. Av den grunn bør det bli tatt i betraktning at mange elever kan ha gjettet og fått riktig svar siden det i prinsippet er 25 % sannsynlighet for å få korrekt svar ved å gjette helt tilfeldig. Hvis mange flere enn 25 % har klart å løse oppgaven kan det hypotetisk sett antas at noen har hatt en oppfatning om hva som er riktig. Andelen av riktige svar på de utvalgte oppgavene som jeg har hentet fra TIMSS 2011 viser at det som oftest ikke er mye mer enn 25 % og det blir derfor vanskelig å si noe med sikkerhet. Når det er sagt må det nevnes at mangel på ferdigheter innenfor likninger og ulikheter kan være grunnen til eventuelle gjetninger. Ifølge Resell-Hansen vitner feilsvarene i TIMSS-oppgavene i algebra om at elevene har lite kompetanse i algebra (2014, s. 64). Dette fordi mange sannsynligvis gjetter, og grunnet mangel på nødvendige verktøy velger de feilaktige løsninger (Resell-Hansen, 2014, s. 64). Mangel på nødvendige verktøy kan være forårsaket av hva og hvordan lærebøkene presenterer algebra. I dette kapittelet observerte vi at de undersøkte lærebøkene i Norge i varierende grad bidrar til manglende kunnskaper i likninger og ulikheter sammenlignet med læreboken fra Singapore. Videre har det blitt sett at flere oppgaver fra TIMSS 2011 krever kompetanse i områder som mange norske elever muligens ikke har blitt undervist i før undersøkelsen. Man kan naturligvis ikke anta at elevene har kunnskap i noe de ikke har blitt introdusert for i undervisningen. Dette kan gjelde for områdene i matematikken som vi har sett at de utvalgte lærebøkene ikke dekker.

7 Konklusjon

7.1 Forskningsspørsmål og problemstilling

På bakgrunn av forrige kapittel skal jeg i dette kapittelet avslutte oppgaven ved å svare på forskningsspørsmålene og problemstillingen. For å besvare forskningsspørsmålene i denne analysen har jeg brukt det analytiske rammeverket til Hong og Choi (2014).

Første forskningsspørsmål var: *Hva skiller presentasjonen av likninger og ulikheter i utvalgte lærerbøker på 8. trinn i Norge og secondary one i Singapore?* Sammenligningen i denne studien har påpekt flere forskjeller ved lærebøkenes innhold, struktur, nivå og progresjon. Det mest påfallende funnet er at noen av de norske lærebøkene introduserer færre temaer innenfor likninger og ulikheter enn det den singaporske læreboken gjør. Et tema som det ikke er spor av i noen av de norske bøkene er likninger med brøk der variabelen er i nevner. Videre presenterer *Tetra* verken likninger eller ulikheter i læreboken for 8. trinn. *Grunntall* er den eneste av de fire norske lærebøkene som presenterer ulikheter. Av de norske lærebøkene er det kun *Maximum* som gir tekstoppgaver som krever modelleringsprosessen. Det er svært få oppgaver hvor elevene kan få muligheten til å utforme algebraiske problemer ved hjelp av likninger eller ulikheter, lete etter mønster og tolke svaret. Den singaporske læreboken skiller seg mest ut med tanke på at den i større grad gir en hverdagslig kontekst i forhold til hvordan likninger og ulikheter blir presentert innledningsvis, i eksempler og i oppgaver. De norske bøkene presenterer hvordan man kan løse likninger ved å resonnere seg frem til riktig svar uten å bruke regneregler eller ved å bruke praktisk utstyr som for eksempel pinner og brikker. Stort sett fokuserer de norske bøkene på løsningsteknikker for å løse oppgaver og gir i stor grad oppgaver der man kan herme etter eksemplene. Sammenlignet med den singaporske læreboken er det som oftest små forskjeller mellom oppgaver fra de ulike vanskelighetsgradene i de norske lærebøkene og det kan derfor bli lite utfordrende spesielt for de flinkeste elevene i de bøkene jeg har analysert. Dette samsvarer med resultatene til den nye boken til Grønmo, Jahr, Skogen og Wistedt (2014) om at skolen svikter de flinke elevene.

Det andre forskningsspørsmålet var: *Hvordan skiller oppgavene seg på det kognitive nivået i de utvalgte singaporske og norske lærebøkene?* Dette kan besvares ved hjelp av dataene gitt ved kategorisering av regneoppgavene. Hvilket kognitivt nivå oppgavene i lærebøkene fordrer kommer frem når man ser på de fire kognitive nivåene: ”Memorering”, ”Prosedyre uten kobling”, ”Prosedyre med kobling” og ”Regne matematikk”. De fleste oppgavene i alle bøkene i denne studien fordrer et lavt kognitivt nivå. Av de som skiller seg mest ut er *Grunntall* og *Faktor* som har fått mange oppgaver under nivået ”Memorering” blant liknings-oppgaver. Begrensningene som medføres av en betydelig mengde av slike oppgaver gjør at elevene som bruker *Grunntall* og *Faktor* i mindre grad fordres til å måtte resonnere og å lage sine egne generaliseringer. *Maximum* og den singaporske læreboken ligger på et høyere nivå blant lærebøkene. Når det gjelder ulikheter ligger *DM1* mer på det høyere nivået og *Grunntall* på det lave. Ettersom jeg har tatt utgangspunkt i eksempler varierer resultatene med tanke på hvorfor noen lærebøker har mange oppgaver innenfor et lavere eller et høyere kognitivt nivå. Den singaporske læreboken viser hvordan man bruker omtrent alle regneregler. Oppgaver som har falt innenfor et høyere nivå krever bruk av konsepter som er presentert tidligere. I tillegg er det noen oppgaver på det høyeste kognitive nivået der fremgangsmåten ikke er gitt og man må tenke mer komplekst. De norske lærebøkene trekker omtrent ikke inn andre konsepter. De oppgavene som har falt innenfor høyt kognitivt nivå skyldes som oftest at det ikke er vist hvordan man bruker enkelte regneregler som for eksempel multiplikasjonsregelen. I tillegg er det ikke bare ensformede oppgaver i den singaporske læreboken, noe vi ser mer av i de norske lærebøkene.

Sist men ikke minst vil jeg forsøke å besvare problemstillingen som var: *I hvilken grad bidrar fremstillingen av likninger og ulikheter i norske lærebøker for 8. trinn til å kunne besvare utvalgte TIMSS-oppgaver fra 2011 sammenlignet med en singaporsk lærebok fra secondary one?* I denne oppgaven har vi sett at *DM1* har variasjon i kognitive nivå, vanskelighetsgradene på oppgavene varierer innenfor de ulike fargekodete nivåene, boken presenterer flere temaer innenfor områdene ligninger og ulikheter, presentasjonen av områdene er knyttet til hverdagslig kontekst, og den har tekstoppgaver som fordrer modelleringsaspektet i både ligningskapitlet og ulikhetskapitlet.

De norske lærebøkene, *Grunntall* og *Faktor*, tilrettelegger i lavere grad utfordringer for elevene med sikte på kunnskaper om likninger og ulikheter. Det store flertallet av oppgavene krever kun herming etter eksempler. Bøkene har mindre variasjon av oppgaver på de ulike, fargekodete vanskelighetsgradene sammenlignet med *DM1*. Modelleringsmetoder for tekstoppgaver som krever modellering presenteres ikke i det hele tatt. Likning med variabelen i nevner presenteres heller ikke. *Faktor* har lite hverdagsnær kontekst i presentasjon av ligninger, og *Grunntall* forholder seg kun til matematisk kontekst i begge områdene. *Faktor* presenterer ikke ulikheter i det hele tatt og bidrag til å kunne besvare denne typen oppgaver i TIMSS 2011 er derfor lik null. Den norske læreboken *Tetra* presenterer ikke noen av områdene, så *Tetra*-elever møter de aktuelle TIMSS-oppgavene uten forkunnskaper dersom de ikke bruker utfyllende undervisningsmateriell.

Maximum fra 2013 gir inntrykk av at det i de senere årene etter TIMSS 2011 har blitt mer fokus på å gi tekstoppgaver som inkluderer modelleringsaspektet, oppgaver som fordrer høyere kognitivt nivå og som er knyttet til elevenes hverdag. Denne bokens fremstilling av likninger utfordrer elevene mer, skjønt var ikke i bruk i forkant av TIMSS 2011. Variasjon i vanskelighetsgrad innen fargekodete nivåer er høyere enn i de andre norske bøkene. Sammenlignet med singaporske *DM1* bidrar disse faktorene i sum mindre. Ulikheter og likning med variabelen i nevner er helt utelatt fra *Maximum*.

Sammenligningene viser at norske lærebøker varierer i stor grad i forhold til det å forberede norske elever på utvalgte TIMSS-oppgaver. Noen av bøkene forbereder ikke elevene i det hele tatt på enkelte områder. Når 94 % av de norske lærerne fra nevnt undersøkelse i kapittel 4 sier at de støtter seg til læreverkene som undervisningsgrunnlag, er det ikke overraskende at norske elever støter på problemer i TIMSS-undersøkelsen. En innstramming av lærebokforfatternes frihet til å velge *når* i ungdomsskolens treårsløp områdene presenteres, kunne høyst sannsynlig bidratt til å forberede elevene bedre. Likevel tyder besvarelsen av problemstillingen min på at bøkene som ble brukt før 2011 ikke kunne forberedt elevene til å prestere på singaporsk nivå, gitt en slik innstramming. De verken utfordrer elevene eller krever kognitivt nivå av de på lik linje som singaporske *DM1*. Det er noen viktige poeng som er verdt å se dette i lys av: Singaporske elever lærer algebra tidligere og de bruker problemløsingsverktøyet "The Model Method" fra primary som tilsvarer barneskolen. Hvor stor grad dette spiller inn er ikke lett å si. Muligens forberedte dette alene elevene bedre til TIMSS 2011. I tillegg har vi sett på *Maximum* fra 2013 som viser at dagens bøker kanskje er på vei til å heve nivået på norske elever med hjelp av samme didaktiske strukturer som den singaporske læreboken. Disse poengene krever mer forskning for å kartlegge relevansen til.

Som vi har sett, indikerer funnene mine at fremstillingen av likninger og ulikheter i de norske lærebøkene *Grunntall* og *Faktor* bidrar i mindre grad til å kunne besvare de utvalgte TIMSS-oppgavene sammenlignet med Singaporske *DM1*. Norske *Maximum* bidrar i større grad enn de andre norske, men ikke i like stor grad som *DM1*.

7.2 Implikasjoner for fremtidig forskning

På bakgrunn av resultater av min studie kan man stille spørsmål om det er ønskelig at norske lærebøker skal legge mer vekt på å introdusere elevene for algebra og ikke minst et spørsmål om hvilken måte det skal gjøres. Som nevnt introduserer *Maximum* fra 2013 matematikk på en måte som ligger nærere slik Singapore introduserer matematikk. Det kunne derfor vært interessant å isolert resultatene fra norske *Maximum*-elever i neste TIMSS.

Det er et stort forbedringspotensiale i de norske lærebøkene, når vi sammenligner med den singaporske. Funnene kan være relevante for myndighetene for utarbeiding av nye læreplaner eller revidering av læreplanen. Da har forlagene mulighet til å ta hensyn til denne studiens funn når de lager nye lærebøker. I 2013 ble læreplanene revidert og det legges i dag mer vekt på algebra enn i den opprinnelige planen for Kunnskapsløftet fra 2006 (Grønmo, Borge & Onstad, 2013). Dette kan gi forbedringer i algebrapresentasjonen, noe som en ny sammenligningsstudie av bøker som følger den nye læreplanen kunne belyst når det foreligger nye TIMSS-resultater. En slik sammenligningsstudie kunne hatt nytte av å bruke samme analytisk rammeverk som jeg har brukt i denne studien. Jeg foreslår å bruke andre kriterier for kategoriene i kodingsmanualen for den vertikale analysen som er gitt i kapittel 4.2.1. Jeg mener at flere interessante funn kunne ha kommet frem med litt andre justeringer for kriteriene. Man kan eventuelt ha med flere kategorier. I slutten av kapittel 6.1.3 kan vi se hvilke interessante funn som jeg mener ikke kom frem på grunn av kriteriene for kodingsmanualen.

Litteraturliste

Ary, D., Jacobs, L. C., Razavieh, A., & Sorensen, C. (2010). *Introduction to research in education*: Cengage Learning.

Ary, D., Walker, D. A., & Jacobs, L. C. (2014). *Introduction to research in education*. [Belmont, Calif.]: Wadsworth Cengage Learning.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bratholm, B. (2001). Godkjenningsordningen for lærebøker 1889- 2001, en historisk gjennomgang. Hentet 03.04, 2014, fra http://www-bib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2001-05/not5-2001-02.html

Brekke, G., Grønmo, L. S., & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra: F, H og J*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 117-151.

Chin, T. Y., Chua, E. K. Y., Chua, P. H., Foo, S. F., Loh, M. Y., Poon, C. L., . . . Yen, Y. P. (2012). Singapore. In I. V. S. Mullis, M. O. Martin, C. A. Minnich, G. M. Stanco, A. Arora, V. A. S. Centurino & C. E. Castle (Eds.), *TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science* (pp. 801-816). Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K., & Bell, R. C. (2011). *Research methods in education*. London: Routledge.

Flick, U. (2007). *The SAGE Qualitative research kit*. London: SAGE.

Foy, P., Drucker, K. T., & Stanco, G. M. (2013). TIMSS 2011 User Guide for the International Database. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*.

Gjone, G. (2003). Læreplaner og læreplanutvikling i matematikk. I: B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (s. s. 261-287). Bergen: Fagbokforlaget.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. I: A. E. Kelly & R. A. Lesh (Red.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Grønmo, L. S., Borge, I. C., & Onstad, T. (2013). Hvor står vi - hvor går vi? I: T. Onstad & L. S. Grønmo (Red.), *Opptur og nedtur: Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (s. 163- 169). Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Borge, I. C., & Rosén, M. (2013). Læringsmuligheter og prestasjoner i matematikk på 8. trinn. I: T. Onstad & L. S. Grønmo (Red.), *Opptur og nedtur: Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige* (s. 73-96). Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Jahr, E., Skogen, K., & Wistedt, I. (2014). *Matematikktalenter i skolen, hva med dem?* Oslo: Cappelen Damm.

Grønmo, L. S., & Onstad, T. (2013). *Opptur og nedtur: Analyser av TIMSS-data for Norge og Sverige*. Oslo: Akademika forlag.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika forlag.

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole: En studie av fremstillingen av problemløsningsmetoder i algebraeksempler i lærebøkene for kursene 1T og R1.* (Master), Universitetet i Oslo, Blindern.

Hjardemaal, F. (2011). Vitenskapsteori. I: T. A. Kleven (Ed.), *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolkning og vurdering* (s. 179-216). Oslo: Unipub.

Hong, D. S., & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations. *Educational studies in mathematics, 85*(2), 241-263. doi: 10.1007/s10649-013-9512-4

Hovdenak, S. S. (2013). Kvalitative studier - om forskningsdesign og tilnærminger. Hentet 15.04, 2014

Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts*. Canada: Pacific Educational Press.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 225-236). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kheong, D. F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2009). *My pals are here, Maths 6A.* Malaysia: Marshall Cavendish International (Singapore).

Kleven, T. A., Hjardemaal, F., & Tveit, K. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolkning og vurdering*. Oslo: Unipub.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education, 16(4)*, 5-54.

Kunnskapsdepartementet. (1995). Ny lovgivning om opplæring Hentet 14.03, 2014, fra http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/nouer/1995/nou-1995-18/25.html?id=140390

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Gyldendal akademisk.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). Working group on early algebra. I: K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The Future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI study* (Vol. vol 8, s. 45-70). New York: Springer.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics, 52*(1), 29-55.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Maxwell, J. A. (1996). *Qualitative research design: an interactive approach*. Thousand Oaks, Calif.: Sage Pulications.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design: an interactive approach*. Thousand Oaks, Calif.: Sage Publications.

Ministry of Education. (2007a). Mathematics Syllabus Primary. Hentet 26.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-primary-2007.pdf

Ministry of Education. (2007b). Secondary Mathematics Syllabuses. Hentet 19.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf

Ministry of Education. (2012a). Approval, Vetting and Review of Textbooks. Hentet 26.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/media/parliamentary-replies/2012/07/approval-vetting-and-review-of.php

Ministry of Education. (2012b). Selection of books in the approved textbook list for primary schools. Hentet 26.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/media/parliamentary-replies/2012/08/selection-of-books-in-the-appr.php

Ministry of Education. (2013, 04.02). Secondary education. Hentet 05.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/education/secondary/

Ministry of Education. (2014, 14.02). Subject Syllabuses - Sciences. Hentet 14.03, 2014, fra http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*: ERIC.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). TIMSS 2011 Assessment Frameworks. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009a). Model method: A Visual Tool to Support Algebra Word Problem Solving at the Primary Level. I: W. K. Yoong, L. P. Yee, B. Kaur, F. P. Yee & N. S. Fong (Red.), *Mathematics education: the Singapore journey* (Vol. 2, s. 169-203). Hackensack, N.J: World Scientific.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009b). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 282-313.

Onstad, T., & Grønmo, L. S. (2012). Norway. In I. V. S. Mullis, M. O. Martin, C. A. Minnich, G. M. Stanco, A. Arora, V. A. S. Centurino & C. E. Castle (Eds.), *TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science* (pp. 669-680). Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Polya, G. (2008). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*: Princeton university press.

Provasnik, S., Kastberg, D., Ferraro, D., Lemanski, N., Roey, S., & Jenkins, F. (2012). Highlights from TIMSS 2011: Mathematics and Science Achievement of US Fourth- and Eighth-Grade Students in an International Context. NCES 2013-009. *National Center for Education Statistics*.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 39-53). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reisegg, Ø., & Askheim, S. (u.d.). Skole og utdanning i Norge. Hentet 17.03, 2014, fra http://snl.no/Skole_og_utdanning_i_Norge

Resell-Hansen, R. (2014). *Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt?: En studie av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar.* (Master Master thesis), UiO, Oslo.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Raizen, S. A., & Jakwerth, P. M. (1997). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Sivesind, K., & Elstad, E. (2010). *PISA: sannheten om skolen?* Oslo: Universitetsforl.

Solerød, E. (2009). Læringstradisjoner. I: R. Svanberg & H. P. Wille (Red.), *La stå!: læring - på veien mot den profesjonelle lærer* (s. 63-90). Oslo: Gyldendal akademisk.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stevenson, H. W. (1985). An Analysis of Japanese and American Textbooks in Mathematics.

Tangenten. (2006). Ny plan - nye lærebøker. Hentet 08.06, 2014, fra http://www.caspar.no/tangenten/2006/t-2006-3.pdf

Tanggaard, L., & Brinkmann, S. (2012). Intervjuet: Samtalen som forskningsmetode I: W. Hansen, L. Tanggaard & S. Brinkmann (Red.), *Kvalitative metoder: empiri og teoriutvikling* (s. 17-45). Oslo: Gyldendal akademisk.

TIMSS. (u.d.-a). Frigitte oppgaver. fra http://www.timss.no/Oppgaver 2011/Matematikk G8.pdf

TIMSS. (u.d.-b). TIMSS 2011 schedule. Hentet 29.04, 2014, fra http://www.timss.com/

Utdanningsdirektoratet. (2010). Endring av læreplaner sommer 2010. Hentet 29.04, 2014, fra http://www.udir.no/Upload/larerplaner/endringer_synelige_pdf/5/Matematikk_med_synlige_endringer.pdf?epslanguage=no

Utdanningsdirektoratet. (2011). Fag- og timefordeling. http://www.udir.no/Upload/Rundskriv/2011/Udir-1-2011-Fag-og-timefordeling_des2011.pdf?epslanguage=no

Utdanningsdirektoratet. (2013). Kompetansemål 8.-10 trinn. Hentet 18.03, 2014, fra http://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Kompetansemaal/?arst=98844765&kmsn=583858936

Utdanningsdirektoratet. (u.d.). Utdanningsprogram. fra http://www.udir.no/Lareplaner/Finn-utdanningsprogram/

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and teaching* (s. 317-325). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Yoong, W. K., & Hoe, L. N. (2009). Singapore Education and Mathematics Curriculum. I: W. K. Yoong, L. P. Yee, B. Kaur, F. P. Yee & N. S. Fong (Red.), *Mathematics education: the Singapore journey* (Vol. 2, s. 13-47). Hackensack, N.J: World Scientific.

Lærebøker

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2011). *Grunntall 8: Matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk Undervisningsforlag AS.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.-B., & Öberg, B. (2010). *Tetra 8: Matematikk for ungdomstrinnet*. Norge: Det Norske Samlaget.

Hjardar, E., & Pedersen, J.-E. (2006). *Faktor 1: Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelens Damm Forlag AS.

Keung, C. W., Cheng, E. N. Y., & San, P. L. (2007). *Discovering Mathematics 1B*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Keung, C. W., Cheng, E. N. Y., & San, P. L. (2010). *Discovering Mathematics 1A*. Singapore: Star Publishing Pte Ltd.

Tofteberg, G. N., Tangen, J., Stedøy-Johansen, I. M., & Alseth, B. (2013). *Maximum 8: Matenatikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Figurer og tabeller

Liste over figurer:

Liste over tabeller: